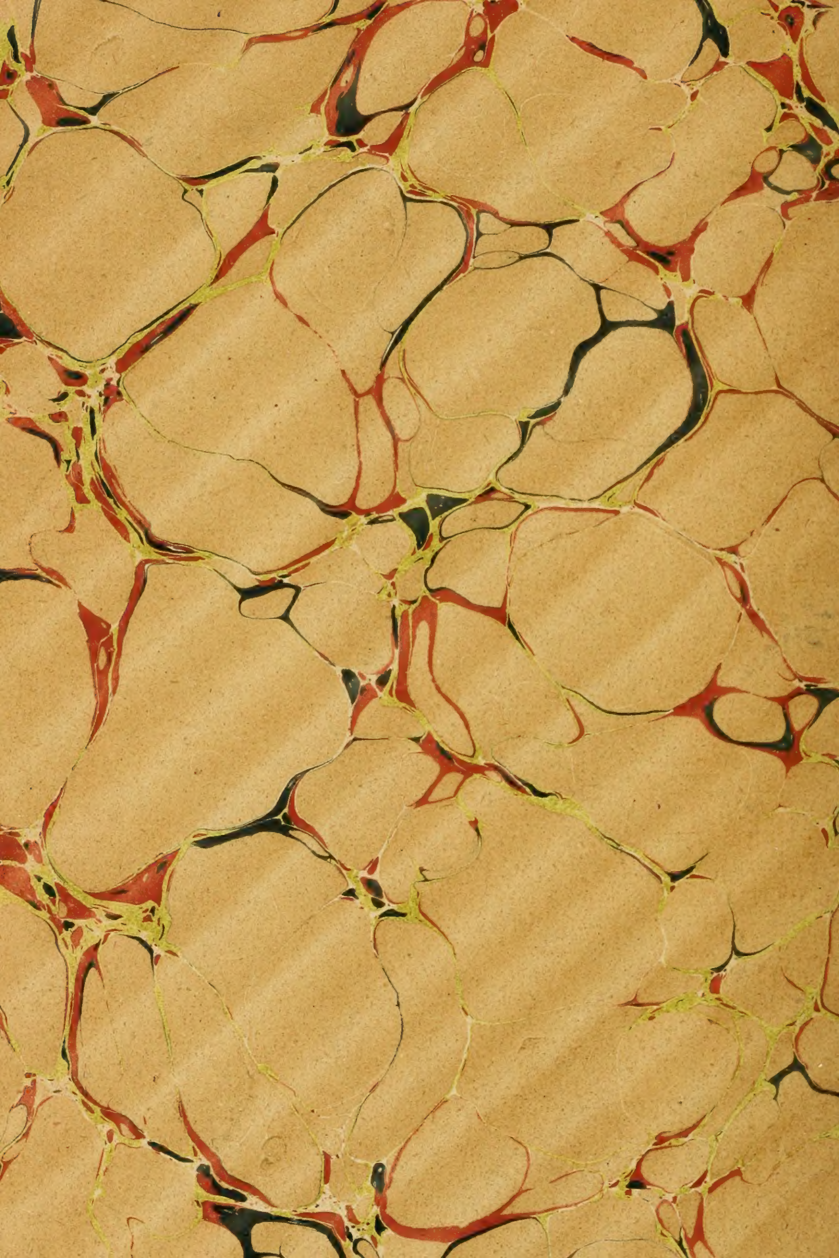
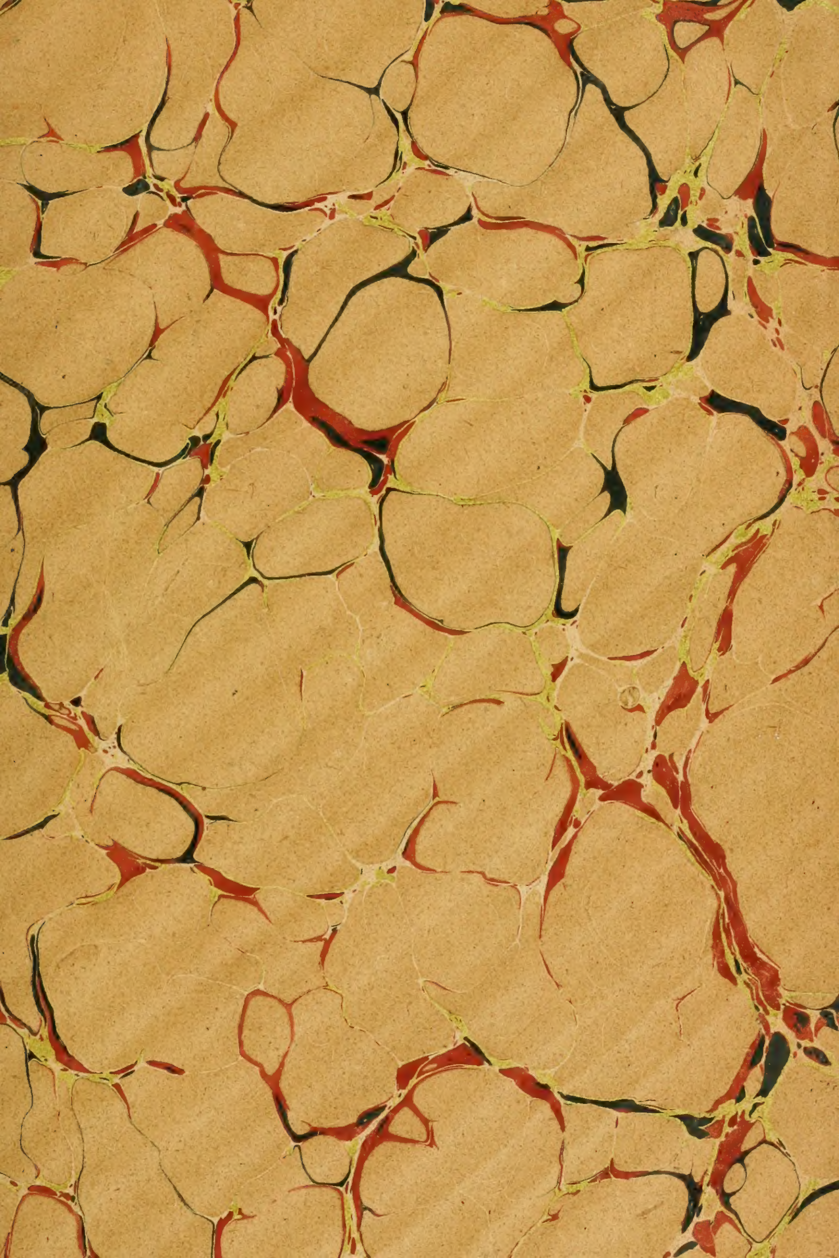

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219481 7





TRAITÉ

D'ANALYSE


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

TRAITÉ

D'ANALYSE

PAR

H. LAURENT,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Le calcul de Leibnitz l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles mathématiciens de l'Europe.

De l'Hospital, *Calcul des infiniment petits.*

TOME III.

CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1888


SEP
1985

PRÉFACE.

L'abondance des matières nous oblige à placer dans un autre Volume la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes que nous comptions donner dans le troisième ; d'autres matières ont dû aussi être rejetées plus loin, mais nous tiendrons les promesses que nous avons faites dans la Préface de notre premier Volume et nous développerons toutes les questions dont nous avons parlé dans cette Préface.

Je saisis cette occasion pour remercier MM. Pagadoy et Le Pont, qui ont bien voulu me prêter leur gracieux concours pour la correction des épreuves.

H. L.

TRAITÉ
D'ANALYSE.

CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

I. — Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

La théorie que nous allons développer est surtout utile dans le Calcul intégral; elle est traitée dans un grand nombre d'Ouvrages élémentaires, mais nous croyons devoir l'exposer succinctement pour épargner au lecteur la peine de l'étudier ailleurs.

D'abord étant donnée une fonction rationnelle, c'est-à-dire de la forme $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$, dans laquelle $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ sont deux polynômes entiers en x, on peut la mettre sous la forme $\mathrm{E}(x)+\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{F}(x)}$, $\mathrm{E}(x)$ désignant un polynôme entier en x et R un polynôme de degré inférieur à $\mathrm{F}(x)$; en effet, divisons

$f(x)$ par $F(x)$. Soient $E(x)$ le quotient; $R(x)$ le reste; on aura

$$f(x) = E(x)F(x) + R(x),$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{F(x)};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Occupons-nous maintenant exclusivement des fractions de la forme $\frac{R(x)}{F(x)}$, où R est de degré inférieur à F, et supposons $R(x)$ et $F(x)$ sans facteurs communs; c'est ce que nous appellerons une fraction proprement dite.

Décomposons $F(x)$ en facteurs premiers, et soit

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots,$$

a, b, ... étant des nombres différents, réels ou imaginaires, et α, β, ... des exposants entiers et positifs. Soit

$$F(x) = (x-a)^\alpha \theta(x)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\theta(x) = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots;$$

on aura

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{R(x)}{(x-a)^\alpha \theta(x)},$$

et identiquement

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{R(x) - A\theta(x)}{(x-a)^\alpha \theta(x)}.$$

Déterminons A au moyen de l'équation

$$R(a) - A\theta(a) = 0 \qquad \text{ou} \qquad A = \frac{R(a)}{\theta(a)},$$

$R(x) - A\theta(x)$ sera divisible par $x-a$; en appelant $R_1(x)$ le quotient par $x-a$, on aura

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{R_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\theta(x)}.$$

On peut donc décomposer $\frac{R(x)}{F(x)}$ en une fraction de la forme $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, où A est constant, et en une autre fraction proprement dite dont le dénominateur est de degré moins élevé d'une unité au moins que $F(x)$; en opérant sur cette fraction comme sur $\frac{R(x)}{F(x)}$, on la décomposera en un terme de la forme $\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}$ et en une fraction plus simple, et ainsi de suite. On arrivera ainsi à une identité telle que

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{S(x)}{\theta(x)},$$

$A, A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha-1}$ désignant des constantes et $S(x)$ un polynôme de degré inférieur à $\theta(x)$. En opérant sur $\frac{S(x)}{\theta(x)}$ comme sur $\frac{R(x)}{F(x)}$, on aura de même

$$\frac{S(x)}{\theta(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{T(x)}{\varphi(x)},$$

$T(x)$ désignant un polynôme de degré inférieur à

$$\varphi(x) = (x-c)^\gamma \ldots$$

et $B, B_1, B_2, \ldots$ représentant des constantes. Finalement, on voit que $\frac{R(x)}{F(x)}$ peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{F(x)} = &\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Lorsque $R(x)$ et $F(x)$ sont à coefficients réels et lorsque les quantités $a, b, c, \ldots$ sont imaginaires en totalité ou en partie, celles de ces quantités qui sont imaginaires sont conjuguées deux à deux, et l'on peut adopter un mode de décomposition en éléments simples réels.

Voici comment on devra opérer pour y arriver. Soit

$$F(x) = (x - a - b\sqrt{-1})^{\alpha}(x - a + b\sqrt{-1})^{\alpha}\theta(x),$$

$\theta(x)$ désignant un polynôme entier qui ne s'annule plus par $x = a \pm b\sqrt{-1}$; on pourra écrire

$$F(x) = [(x-a)^2 + b^2]^{\alpha}\theta(x),$$

et l'on aura identiquement

$$(1)\qquad \frac{R(x)}{F(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-a)^2+b^2]^{\alpha}} + \frac{R(x) - (Mx+N)\theta(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{\alpha}\theta(x)}.$$

Déterminons M et N de telle sorte que

$$(2)\qquad R(a+b\sqrt{-1}) - [M(a+b\sqrt{-1})+N]\theta(a+b\sqrt{-1}) = 0,$$

équation qui, en séparant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, équivaut à deux équations; la fraction écrite la dernière dans la formule (1) se simplifiera, ses deux termes étant divisibles par $(x-a)^2 + b^2$, en sorte que l'on aura

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-a)^2+b^2]^{\alpha}} + \frac{R_1(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{\alpha-1}\theta(x)};$$

et sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce fait, il est facile de voir que l'on aura pour $\frac{R(x)}{F(x)}$ un développement de la forme

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-a)^2+b^2]^{\alpha}} + \frac{M_1x+N_1}{[(x-a)^2+b^2]^{\alpha-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{M_{\alpha-1}x+N_{\alpha-1}}{(x-a)^2+b^2} + \frac{S(x)}{\theta(x)},$$

les M et les N désignant des constantes et $\frac{S(x)}{\theta(x)}$ une fraction plus simple que $\frac{R(x)}{F(x)}$ sur laquelle on opérera comme sur celle-ci.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de compléter le raisonnement qui précède en montrant que l'équation (2)

fournit toujours des valeurs bien déterminées pour M et N. A cet effet, posons

$$\theta(a+b\sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1}, \qquad R(a+b\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1},$$

nous aurons, au lieu de (2),

$$U + V\sqrt{-1} - [Ma + N + Mb\sqrt{-1}](A + B\sqrt{-1}) = 0,$$

équation qui se décompose en

$$\begin{aligned} U &= M(Aa - Bb) + NA, \\ V &= M(Ba + Ab) + NB; \end{aligned}$$

le déterminant de ces équations est $-b(A^2+B^2)$, or b n'est pas nul, puisque $a+b\sqrt{-1}$ est supposé imaginaire; A^2+B^2, carré du module de $\theta(a+b\sqrt{-1})$, n'est pas nul non plus, puisque $\theta(x)$ ne s'annule pas pour $x = a+b\sqrt{-1}$; donc M et N sont bien déterminés.

II. — Remarque sur le mode de décomposition.

De la discussion précédente, il résulte que toute fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut se décomposer en éléments simples selon la formule

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = E(x) &+ \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{M_1 x + N_1}{(x-p)^2+q^2} + \ldots + \frac{M_m x + N_m}{[(x-p)^2+q^2]^m} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

$E(x)$ désignant un polynôme entier, les A, B, ..., M, N, ..., $a, b, \ldots, p, q, \ldots$ des constantes, les $\alpha, \beta, \ldots, m, \ldots$ des entiers positifs constants. Nous allons voir qu'*une fonction*

rationnelle ne peut se décomposer que d'une seule manière en éléments simples.

En d'autres termes, si l'on pose

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = E'(x) + \frac{A'_1}{x-a'} + \frac{A'_2}{(x-a')^2} + \ldots + \frac{A'_{\alpha'}}{(x-a')^{\alpha'}} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{M'_1 x + N'_1}{(x-p')^2+q'^2} + \ldots + \frac{M'_{m'} x + N'_{m'}}{[(x-p')^2+q'^2]^{m'}} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

on aura nécessairement

$$E = E', \quad a = a', \quad b = b', \quad \ldots, \quad \alpha = \alpha', \quad \ldots, \quad A_1 = A'_1, \quad \ldots.$$

En effet, les seconds membres de (1) et (2) doivent être égaux, quel que soit x, puisqu'ils sont égaux, quel que soit x, à la même fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$: donc ils sont égaux pour $x = a$. Or le deuxième membre de (1) est infini pour $x = a$, le deuxième membre de (2) doit donc aussi être infini pour $x = a$, ce qui exige que l'une des quantités a', b', ... soit égale à a. Supposons $a' = a$, je dis que $\alpha' = \alpha$; en effet, imaginons $\alpha' < \alpha$, les seconds membres de (1) et (2) seront encore identiques si on les multiplie par $(x-a)^{\alpha'}$; mais cela ne peut avoir lieu si $\alpha' < \alpha$, puisque le deuxième membre de (1) est encore infini pour $x = a$, le deuxième de (2) ne l'étant plus : donc $\alpha = \alpha'$. Maintenant je dis que $A_\alpha = A'_\alpha$; en effet, retranchons aux seconds membres de (1) et (2) $\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$ et multiplions-les par $(x-a)^{\alpha-1}$, le deuxième membre de (1) n'est plus infini pour $x = a$, le deuxième membre de (2) l'est encore, si A_α n'est pas égal à A'_α : donc $A_\alpha = A'_\alpha$. Si alors, aux deux seconds membres de (1) et (2) on retranche $\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$, ils doivent encore être égaux, et par suite on voit, par un raisonnement analogue à celui que l'on vient de faire, que $A_{\alpha-1} = A'_{\alpha-1}$, ...

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que $b = b'$,

$\beta = \beta'$, $B_1 = B'_1$, $B_2 = B'_2$, ..., $M_1 = M'_1$, $N_1 = N'_1$, $p = p'$, $q = q'$, ..., et alors il reste $E = E'$. Ce qui établit le théorème que nous avons énoncé.

III. — Calcul des coefficients.

Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction dont le numérateur soit de degré inférieur au dénominateur ; soit

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \ldots;$$

posons

$$\frac{(x-a)^\alpha f(x)}{F(x)} = \theta(x);$$

$\theta(x)$ ne sera ni nul ni infini pour $x = a$, et la formule de Taylor donnera

$$\theta(x) = \theta(a) + (x-a)\frac{\theta'(a)}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^{\alpha-1}\theta^{\alpha-1}(a)}{1.2.3\ldots(\alpha-1)} + (x-a)^\alpha P,$$

et, par suite, en divisant par $(x-a)^\alpha$,

$$\frac{\theta(x)}{(x-a)^\alpha} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\theta(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\theta'(a)}{1(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{\theta^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-a)} + P.$$

P est une fraction qui n'est plus infinie pour $x = a$, et l'on pourra opérer sur P comme sur $\frac{f}{F}$, mais en observant que la décomposition en éléments simples ne peut se faire que d'une seule manière ; on aura les termes infinis pour $x = a_1$, pour $x = a_2$, ..., comme on a obtenu ceux qui sont infinis pour $x = a$. La formule précédente peut s'écrire

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{(\alpha-1)!}\Bigg[\theta(a)\frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}}(x-a)^{-1}$$
$$+ \frac{\alpha}{1}\theta'(a)\frac{d^{\alpha-2}}{da^{\alpha-2}}(x-a)^{-1} + \ldots + \theta^{\alpha-1}(a)(x-a)^{-1}\Bigg] + P$$

ou bien encore

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} \frac{\theta(a)}{x-a}$$

ou enfin

$$(2)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dz^{\alpha-1}} \frac{\theta(z)}{x-z}\right]_{z=a}.$$

On a ainsi sous forme explicite la fonction $\frac{f(x)}{F(x)}$ décomposée en éléments simples.

Remarque. — La formule précédente peut être écrite

$$f(x) = \sum \frac{F(x)}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dz^{\alpha-1}} \frac{\theta(z)}{x-z}\right]_{z=a};$$

elle fait connaître une fonction $f(x)$ de degré moindre que $\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ qui prend pour $x=a_i$ une valeur donnée, ainsi que ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, (\alpha_i-1)$.

Si l'on suppose $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=\ldots=1$, on retombe sur la formule d'interpolation de Lagrange

$$f(x) = \sum F(x) \left[\frac{\theta(z)}{z-x}\right]_{z=a}.$$

La formule (2) est générale, mais on peut lui donner une forme dégagée d'imaginaires pour le cas où, parmi les quantités $a, a_1, a_2, \ldots$, il s'en trouve d'imaginaires, pourvu que ces quantités soient conjuguées deux à deux.

Supposons, par exemple,

$$a = p + q\sqrt{-1}, \qquad a_1 = p - q\sqrt{-1},$$
$$\theta(a) = \varphi(p,q) + \sqrt{-1}\,\psi(p,q),$$
$$\theta(a_1) = \varphi(p,q) - \sqrt{-1}\,\psi(p,q),$$

et observons que, en général,

$$\frac{d^n\theta(a)}{da^n} = \frac{d^n\varphi}{dp^n} + \frac{d^n\psi}{dp^n}\sqrt{-1};$$

la formule (1) donnera lieu à la suivante, où les α sous les deux signes Σ ne sont pas forcément égaux :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} \frac{\theta(a)}{x-a}$$
$$+ \sum \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{dp^{\alpha-1}} \left[\frac{\varphi(p,q)+\sqrt{-1}\,\psi(p,q)}{x-p-q\sqrt{-1}} + \frac{\varphi(p,q)-\sqrt{-1}\,\psi(p,q)}{x-p+q\sqrt{-1}} \right]$$

ou bien

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \sum \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} \frac{\theta(a)}{x-a} \\ &+ \sum \frac{2}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{dp^{\alpha-1}} \frac{(x-p)\varphi(p,q)-q\psi(p,q)}{(x-p)^2+q^2}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (1) et (3) sont éminemment propres à fournir les développements de $\frac{f(x)}{F(x)}$ en série, ou à faire connaître les dérivées d'ordre quelconque de cette fonction.

Dans la pratique, on emploie souvent la méthode des coefficients indéterminés pour décomposer une fraction en éléments simples; cette méthode peut être variée à l'infini. Indiquons le procédé que l'on emploie le plus fréquemment : on commence par diviser le numérateur par le dénominateur, le quotient fait connaître la partie entière de la fonction à décomposer; en appelant R le reste et F le dénominateur, on pose

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \sum \frac{A}{(x-a)^i} + \sum \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu};$$

A, M, N restant indéterminés, on chasse les dénominateurs; on remplace alors successivement x par chaque racine de $F(x)=0$: on détermine ainsi autant de coefficients que de racines. On prend ensuite les dérivées des deux membres de l'identité obtenue, et l'on remplace x par chacune des racines doubles de $F(x)=0$: on détermine ainsi autant de coefficients nouveaux que de racines doubles, et ainsi de suite.

Traitons un exemple. Posons

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{M'x+N'}{(x^2+1)^2}.$$

Chassant les dénominateurs, il vient

$$(1)\quad x^3 = A(x^2+1)^2 + (Mx+N)(x-1)(x^2+1) + (M'x+N')(x-1).$$

Si l'on fait $x = 1$, on a

$$1 = 4A, \qquad A = \tfrac{1}{4}.$$

Si l'on fait $x = \sqrt{-1}$, on a

$$-\sqrt{-1} = (M'\sqrt{-1}+N')(\sqrt{-1}-1)$$

et, en identifiant,

$$M'+N' = 0, \qquad M'-N' = 1,$$

d'où

$$M' = \tfrac{1}{2}, \qquad N' = -\tfrac{1}{2}.$$

Prenons maintenant les dérivées des deux membres de l'identité (1); nous aurons, en n'écrivant pas les termes nuls, pour $x = \sqrt{-1}$,

$$3x^2 = (Mx+N)(x-1)2x + M'x + N' + M'(x-1),$$

et, en faisant $x = \sqrt{-1}$ et en remplaçant M' et N' par leurs valeurs,

$$-3 = (M\sqrt{-1}+N)(\sqrt{-1}-1)2\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sqrt{-1}-1).$$

On en conclut

$$-3 = 2M - 2N - 1 + \sqrt{-1}(1-2M-2N)$$

et, en identifiant,

$$N - M = 1, \qquad M + N = \tfrac{1}{2};$$

d'où

$$M = -\tfrac{1}{4}, \qquad N = \tfrac{3}{4}.$$

On a donc

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\,\frac{3-x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{x-1}{(x^2+1)^2}.$$

CHAPITRE II.

CALCUL DES INTÉGRALES.

I. — Définitions.

Le *Calcul intégral* a pour but de rechercher l'expression analytique d'une ou de plusieurs fonctions, lorsque l'on connaît des relations entre ces fonctions et leurs dérivées.

Le problème le plus simple, et aussi le premier que nous aurons à résoudre en abordant l'étude du Calcul intégral, sera de calculer l'expression analytique d'une fonction d'une seule variable, étant donnée celle de sa dérivée.

On appelle *intégrale* d'une fonction $f(x)$, ou d'une différentielle $f(x)\,dx$, la fonction dont la dérivée est $f(x)$. Nous verrons bientôt que les fonctions continues et même qu'un grand nombre de fonctions discontinues ont une intégrale; d'ailleurs, il est bien entendu que, si une fonction admet une intégrale, elle en admet une infinité ne différant entre elles que par une constante (t. I, p. 79).

Bien que toute fonction continue admette une intégrale, on ne sait pas toujours calculer cette intégrale; il y a plus, il est aujourd'hui démontré qu'un certain nombre de fonctions ont des intégrales qui ne peuvent pas s'exprimer au moyen des signes ordinaires de l'Algèbre, y compris les signes log, sin, cos, tang, arc sin, arc cos, arc tang, employés en nombre fini : on dit alors que leurs intégrales *ne peuvent pas s'exprimer en termes finis*.

II. — Des intégrales définies.

Soit $f(x)$ une fonction qui reste finie quand x varie de x_0 à X et qui, dans cet intervalle, possède toujours une valeur bien déterminée pour chaque valeur de x.

Partageons l'intervalle compris entre x_0 et X en n parties égales ou inégales : $x_1 - x_0 = \Delta x_0$, $x_2 - x_1 = \Delta x_1$, ..., $X - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$; désignons par θ_0, θ_1, θ_2, ... des nombres compris entre 0 et 1 ; formons enfin la somme

$$(1)\quad \begin{cases} S = f(x_0 + \theta_0 \Delta x_0)\Delta x_0 + f(x_1 + \theta_1 \Delta x_1)\Delta x_1 + \ldots \\ \qquad + f(x_{n-1} + \theta_{n-1}\Delta x_{n-1})\Delta x_{n-1}. \end{cases}$$

Si cette somme tend vers une limite finie unique, quand, n croissant indéfiniment, Δx_0, Δx_1, ..., Δx_{n-1} tendent vers zéro, et cela quelles que soient les quantités θ (comprises entre 0 et 1) et quel que soit le mode de subdivision de l'intervalle $X - x_0$, on dira que la limite de S est *l'intégrale définie de $f(x)$ prise entre les limites x_0 et* X, et l'on écrira

$$\lim S = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Lemme I. — *Soit $f(x)$ une fonction croissante* [1] *et bien déterminée quand x varie de x_0 à* X; *soient x_1, x_2, ..., x_{n-1} des nombres croissants compris entre x_0 et* X, *la somme*

$$(1)\quad f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1}) = \Sigma$$

sera comprise entre $f(x_0)(X - x_0)$ et $f(X)(X - x_0)$.

En effet, si, dans la somme (1), on remplace $f(x_1)$,

(1) Par ce mot *croissante*, nous n'excluons pas le cas où l'on aurait $f(a) = f(b)$ pour $b > a$. Il ne faut pas oublier qu'une fonction, continue entre les limites x_0 et X, peut fort bien n'être jamais, ni constante, ni croissante, ni décroissante dans cet intervalle, mais nous ne considérerons pas à l'avenir de pareilles fonctions.

$f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$ par la quantité plus petite $f(x_0)$, cette somme ne pourra que diminuer ; donc

$$\Sigma > f(x_0)[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})]$$

ou

$$\Sigma > f(x_0)(X - x_0);$$

on verrait de même que

$$\Sigma < f(X)(X - x_0).$$

Lemme II. — *Si la fonction $f(x)$ était décroissante de x_0 à* X, *la somme* Σ *serait encore comprise entre les mêmes quantités, mais on aurait*

$$f(x_0)(X - x_0) > \Sigma > f(X)(X - x_0.)$$

Lemme III. — *Si l'on considère une fonction $f(x)$ bien déterminée, finie et croissante pour les valeurs de x comprises entre x_0 et* X, *cette fonction admettra une intégrale définie entre ces limites.*

En effet, soient $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ des nombres croissants compris entre x_0 et X ; soient $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ une autre série de nombres croissants compris entre les mêmes limites ; si nous considérons les deux sommes

$$A_m = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{m-1})(X - x_{m-1}),$$
$$B_n = f(z_1)(z_1 - x_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(X)(X - z_{n-1}),$$

on aura $A_m < B_n$. Pour le démontrer, désignons par $x_0, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$, X les quantités $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$; $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, rangées par ordre de grandeur, et considérons les sommes

$$C_p = f(x_0)(y_1 - y_0) + f(y_1)(y_2 - y_1) + \ldots + f(y_{p-1})(X - y_{p-1}),$$
$$D_p = f(y_1)(y_1 - y_0) + f(y_2)(y_2 - y_1) + \ldots + f(X)(X - y_{p-1}).$$

Chaque terme de C_p étant inférieur au terme correspondant de D_p, on a évidemment

$$C_p < D_p;$$

mais A_m est moindre que C_p ou au moins égal à C_p, en

vertu du lemme I; de même B_n est plus grand que D_p; donc

$$A_m < C_p < D_p < B_n \quad \text{et} \quad A_m < B_n.$$

Ceci posé, faisons croître le nombre m indéfiniment, en supposant que les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... deviennent moindres que toute quantité donnée : on aura toujours $A_m < B_n$; on peut donc assigner à A_m une limite A au-dessous de laquelle il restera toujours. De même, si, laissant m fixe, on fait croître n indéfiniment, on pourra assigner à B_n une limite B au-dessus de laquelle il restera toujours. Prenons alors $m = n$ et $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$, ..., $x_{m-1} = z_{n-1}$, nous aurons

$$B_m - A_m = [f(x_1) - f(x_0)](x_1 - x_0) + [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) + \ldots + [f(X) - f(x_{m-1})](X - x_{m-1}),$$

et, en appelant δ la plus grande des différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{m-1}$, nous aurons

$$B_m - A_m < \delta[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(X) - f(x_{m-1})]$$

ou

$$B_m - A_m < \delta[f(X) - f(x_0)].$$

Mais $f(X)$ et $f(x_0)$ étant finis et δ pouvant devenir aussi petit que l'on veut, $B_m - A_m$ pourra être pris moindre qu'une quantité donnée ε. Or

$$A_m < A, \qquad B < B_m;$$

on en conclut

$$A_m + B < A + B_m$$

ou

$$B_m - A_m > B - A;$$

donc $B - A < \varepsilon$, mais, B et A étant fixes, il faut en conclure que $B - A = 0$ et, par suite,

$$A_m < A < B_m;$$

donc $B_m - A < \varepsilon$ et $A - A_m < \varepsilon$, et B_m et A_m ont la même limite A.

Maintenant considérons la somme

$$\Sigma = f(x_0 + \theta_0 \Delta x_0)\Delta x_0 + f(x_1 + \theta_1 \Delta x_1)\Delta x_1 + \ldots \\ + f(x_{m-1} + \theta \Delta x_{m-1})\Delta x_{m-1},$$

dans laquelle on a fait, pour abréger, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, et où $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ désignent des nombres compris entre o et 1. Elle a évidemment pour limite A; en effet, elle est comprise manifestement entre A_m et B_m qui ont pour limite A.

Lemme IV. — *Si la fonction $f(x)$ reste bien déterminée et décroissante pour les valeurs de x comprises entre x_0 et* X, *elle admet une intégrale définie entre ces limites.* (Même démonstration.)

III. — Cas dans lesquels une fonction admet une intégrale définie.

Si nous considérons une fonction $f(x)$ toujours croissante, constante ou décroissante qui, entre les limites x_0, X *de sa variable, n'admet qu'un nombre limité de maxima et de minima, et qui entre ces limites conserve une valeur toujours bien déterminée, elle aura, entre ces limites, une intégrale définie.*

En effet, soient $f(x_0)$ un premier minimum, $f(a_1)$ un premier maximum, $f(a_2)$, un second minimum, etc. Il est clair que l'intégrale définie de $f(x)$ entre les limites x_0 et X sera égale à la somme des intégrales de $f(x)$ prises entre x_0 et a_1, a_1 et a_2, ...; en effet, si, dans la somme

$$\Sigma_n = f(x_0 + \theta_0 \Delta x_0)\Delta x_0 + f(x_1 + \theta_1 \Delta x_1)\Delta x_1 + \ldots \\ + f(x_{n-1} + \theta_{n-1} \Delta x_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

on met à part les termes pour lesquels x_i reste compris entre x_0 et a_1, puis ceux pour lesquels il reste compris entre a_1 et a_2, ..., on voit que Σ_n aura une limite qui sera

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_p}^{X} f(x)\,dx,$$

en vertu de ce principe que la limite d'une somme est égale à la somme des limites de ses parties, quand le nombre des parties est limité. Mais cette conclusion cesserait d'être exacte si le nombre des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ était illimité, l'expression (2) se composant d'une infinité de termes.

Une fonction $f(x)$ peut encore admettre une intégrale définie lorsque, entre les limites x_0 et X, elle a une infinité de maxima et de minima.

Soient en effet $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des valeurs de x comprises entre x_0 et X, et dans le voisinage desquelles $f(x)$ a une infinité de maxima et de minima. Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned}\varphi(x_i, x_j) = f(x_i + \theta_i \Delta x_i)\Delta x_i + f(x_{i+1} + \theta_{i+1}\Delta x_{i+1})\Delta x_{i+1} + \ldots \\ + f(x_{j-1} + \theta_{j-1}\Delta x_{j-1})\Delta x_{j-1};\end{aligned}$$

nous aurons, en appelant $s_1, s'_1, s_2, s'_2, \ldots$ de petites quantités,

$$\begin{aligned}\Sigma_n = \varphi(x_0, a_1 - s_1) + \varphi(a_1 - s_1, a_1 + s'_1) \\ + \varphi(a_1 + s'_1, a_2 - s_2) + \ldots + \varphi(a_k + s'_k, \mathrm{X}).\end{aligned}$$

Soient δ_1 la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de f entre $a_1 - s_1$ et $a_1 + s'_1$, δ_2 la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de f entre $a_2 - s_2$ et $a_2 + s'_2$, ...; $(s_1 + s'_1)\delta_1 + (s_2 + s'_2)\delta_2 + \ldots + (s_k + s'_k)\delta_k$ sera toujours plus grand que

$$\varphi(a_1 - s_1, a_1 + s'_1) + \varphi(a_2 - s_2, a'_2 + s'_2) + \ldots,$$

et, *a fortiori*, si Δ représente la plus grande des quantités δ_1, δ_2, ..., cette somme sera-t-elle moindre que

$$\Delta(s_1 + s'_1 + s_2 + s'_2 + \ldots);$$

elle pourra être représentée par $\Theta\,\Delta(s_1 + s'_1 + s_2 + \ldots)$, Θ désignant un nombre compris entre 0 et 1. On aura alors

$$\begin{aligned}\Sigma_n = \varphi(x_0, a_1 - s_1) + \varphi(a_1 + s'_1, a_2 - s'_2) + \ldots \\ + \varphi(a_k + s'_k, \mathrm{X}) + \Theta\,\Delta(s_1 + s'_1 + s_2 + \ldots).\end{aligned}$$

Si les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont en nombre fini, $s_1, s_1, \ldots$ restant finis, tous les termes de Σ_n, à l'exception du dernier,

tendront vers des limites finies. Soit G la limite de leur somme, Σ_n sera de la forme $G + \varepsilon + \Theta\Delta(s_1 + s'_1 + \ldots)$, ε pouvant être pris aussi petit que l'on voudra, pourvu que l'on fasse n assez grand; or $s_1 + s'_1 + s_2 + \ldots$ peut être pris aussi petit que l'on veut, Δ reste toujours inférieur à une quantité Δ_1 que l'on peut assigner. Σ_n peut donc être resserré entre des limites $G - \omega$ et $G + \omega$, ω étant aussi petit que l'on voudra; donc Σ_n a une limite. C. Q. F. D.

C'est à Cauchy que nous devons d'avoir démontré pour la première fois l'existence de l'intégrale des fonctions finies ([1]).

IV. — Théorème sur les fonctions continues.

Soit $f(x)$ une fonction continue entre les limites x_0 et $X > x_0$ de sa variable, il est toujours possible de trouver un nombre h assez petit pour que, quelle que soit la valeur de x comprise entre x_0 et X et de θ compris entre -1 *et* $+1$, *on ait*

$$\text{(1)} \qquad \text{val. abs.}[f(x+\theta h) - f(x)] \leqq \varepsilon,$$

ε *étant un nombre donné.*

En effet, $f(x)$ étant continu, on peut déterminer un nombre positif h_1 tel que, quel que soit θ compris entre 0 et 1, on ait en valeur absolue

$$f(x_0 + h_1\theta) - f(x_0) \leqq \varepsilon;$$

([1]) Dans un Mémoire présenté en 1854 à la Faculté de Philosophie de Gœttingue, Riemann énonce le théorème suivant : *Pour que la somme Σ_n tende vers une limite* (pour que l'intégrale existe), *il faut et il suffit que la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus grandes que σ, quel que soit σ, puisse être rendue infiniment petite par un choix convenable de d, d désignant une quantité supérieure à* $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$.

L'oscillation de la fonction entre des limites x_i, x_{i+1} est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur entre les limites x_i et x_{i+1}.

(Voir le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V, juillet 1873, p. 34, ou les œuvres de Riemann en allemand.)

on trouvera de même un nombre h_2 donnant lieu à la formule analogue

$$f(x_0 + h_1 + h_2\theta) - f(x_0 + h_1) \leq \varepsilon,$$

et ainsi de suite : on déterminera ainsi une série de nombres positifs $h_1, h_2, h_3, \ldots$. Je dis que l'un des nombres $x_0 + h_1$, $x_0 + h_1 + h_2, x_0 + h_1 + h_2 + h_3, \ldots$ finira par atteindre ou surpasser X. Supposons en effet que, de quelque manière que l'on procède, on ne puisse pas atteindre X, et que le plus grand des nombres inférieurs à X que l'on ne puisse dépasser soit a : alors il n'existera pas de nombre h tel que

$$\text{val. abs.}[f(a + h) - f(a - h)] \leq \varepsilon,$$

et $f(x)$ ne sera pas continu pour $x = a$ compris entre x_0 et X.

Ainsi donc, il existe des nombres x_0, X et $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ intermédiaires entre x_0 et X donnant lieu à des formules telles que

$$\text{val. abs.}[f(x_i + \theta\Delta x_i) - f(x_i)] < \varepsilon,$$

ce qui revient à dire que, x étant un nombre compris entre x_0 et X, on peut prendre h assez petit pour que, quel que soit x, l'égalité (1) ait lieu.

On peut donner à ce théorème une autre forme qui va nous être utile et dire que *l'on peut partager l'intervalle compris entre x_0 et X en un assez grand nombre d'autres assez petits pour que, dans chacun d'eux, la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de $f(x)$ soit moindre qu'une quantité donnée ε.*

V. — Nouveau cas où l'intégrale existe.

Nous avons établi l'existence de l'intégrale définie pour la plupart des cas qui se présentent, car les fonctions que nous rencontrerons dans cet Ouvrage sont croissantes ou décroissantes ; toutefois nous allons établir que :

Si la fonction $f(x)$ est continue (sans être nécessaire-

ment constante, croissante, ou décroissante) entre les limites x_0 et X de sa variable, l'intégrale de $f(x)$ prise entre les limites de x_0 et X existe.

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ des quantités croissantes comprises entre x_0 et X, par $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ d'autres quantités croissantes comprises également entre x_0 et X, enfin par $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ les quantités $x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ rangées par ordre de grandeur, y_1 désignant la plus petite. Soient, en général, M_i la plus grande valeur de $f(x)$ quand x varie de x_i à x_{i+1}, et μ_i la plus petite valeur de cette fonction quand x varie de z_i à z_{i+1}; soient enfin N_i la plus grande valeur que prend $f(x)$ quand x varie de y_i à y_{i+1} et ν_i la plus petite valeur qu'il prend dans le même intervalle; posons [1]

$$\begin{aligned}
A_n &= M_0\,\Delta x_0 + M_1\,\Delta x_1 + \ldots + M_{n-1}\,\Delta x_{n-1},\\
B_m &= \mu_0\,\Delta z_0 + \mu_1\,\Delta z_1 + \ldots + \mu_{m-1}\,\Delta z_{m-1},\\
C_p &= N_0\,\Delta y_0 + N_1\,\Delta y_1 + \ldots + N_{p-1}\,\Delta y_{p-1},\\
D_p &= \nu_0\,\Delta y_0 + \nu_1\,\Delta y_1 + \ldots + \nu_{p-1}\,\Delta y_{p-1},
\end{aligned}$$

nous aurons évidemment

$$A_n \geqq C_p, \qquad B_m \leqq D_p,$$

car la somme A_n ne peut augmenter, quand on subdivise les intervalles (x_0, x_1), (x_1, x_2), ... D'ailleurs on a évidemment

$$C_p \geqq D_p,$$

donc $A_n > B_m$: ainsi on peut assigner à A_n une limite inférieure A, à B_m une limite supérieure B quand on fera croître indéfiniment m et n et décroître indéfiniment les Δ.

Si l'on prend $m = n$, $z_i = x_i$, $A_n - B_m$ ou $A_m - B_m$ sera égal à

$$(M_0 - \mu_0)\,\Delta x_0 + \ldots + (M_{m-1} - \mu_{m-1})\,\Delta x_{m-1}.$$

---

[1] Quand nous parlons de la plus grande ou de la plus petite valeur de $f(x)$, il importe peu pour la démonstration que cette plus grande ou cette plus petite valeur soit réellement atteinte par la fonction, bien que nous ayons montré ailleurs que cette valeur est réellement atteinte.

c'est-à-dire moindre que

$$\varepsilon \Sigma \Delta x \quad \text{ou} \quad \varepsilon(X - x_0),$$

ε désignant la plus grande des différences $M_i - \mu_i$ qui peut être prise, comme on l'a vu au paragraphe précédent, aussi petite que l'on veut, si $f(x)$ est continue; il en résulte que la différence $A_m - B_m$ pourra être prise aussi petite que l'on voudra; mais

$$A_m \geqq A, \qquad B \geqq B_m;$$

donc

$$A_m - B \geqq A - B_m$$

ou

$$A_m - B_m > A - B;$$

donc $A - B$ peut être supposé aussi petit que l'on veut et, comme A et B sont fixes, on a $A = B$, et A_m et B_m ont même limite; or

$$A_m \geqq \sum_{i=0}^{i=m-1} f(x_i + \theta \Delta x_i) \Delta x_i \geqq B_m,$$

la quantité écrite entre A_m et B_m a pour limite l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ par définition. A_m et B_m ayant même limite, l'intégrale en question existera et sera cette limite.

C. Q. F. D.

VI. — Propriétés fondamentales des intégrales définies.

Première propriété. — *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres croissants compris entre x_0 et X, on a*

$$(1) \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{X} f(x)\,dx.$$

En effet, en subdivisant l'intervalle compris entre x_0 et X au moyen des valeurs suivantes données à x

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{p-1}, \quad a_1, \quad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_{q-1}, \quad a_2, \quad \ldots,$$

il vient

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\big[&f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{p-1})\Delta x_{p-1}\\ &+ f(a_1)\Delta a_1 + f(x'_1)\Delta x'_1 + \ldots + f(x'_{q-1})\Delta x'_{q-1}\\ &+ f(a_2)\Delta a_2 + f(x''_2)\Delta x''_1 + \ldots + f(x''_{r-1})\Delta x''_{r-1}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\big].\end{aligned}$$

Or la quantité écrite sur la première ligne du second membre a pour limite $\int_{x_0}^{a_1} f(x)\,dx$, ... La formule (1) se trouve donc démontrée.

Deuxième propriété. — *Soit*

$$F(x) = a\,\varphi(x) \pm b\,\chi(x) \pm c\,\psi(x) \pm \ldots,$$

a, b, c, ... désignant des constantes en nombre fini; on aura

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = a\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \pm b\int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx \pm \ldots.$$

En effet, on a

$$\sum_{x_0}^{X} F(x)\Delta x = a\sum_{x_0}^{X} \varphi(x)\Delta x \pm b\sum_{x_0}^{X} \chi(x)\Delta x \pm \ldots;$$

en faisant tendre les Δx vers zéro et en passant aux limites, on a la formule précédente (bien entendu, on suppose que toutes les intégrales considérées existent et sont en nombre limité).

Troisième propriété. — *Si l'on désigne par* G *une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre $f(x)$ quand x varie de x_0 à* X, *on aura*

(1) $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0)G.$$

En effet, la somme

$$\begin{aligned}&f(x_0 + \theta_0\Delta x_0)\Delta x_0 + f(x_1 + \theta_1\Delta x_1)\Delta x_1 + \ldots\\ &\qquad + f(x_{n-1} + \theta_{n-1}\Delta x_{n-1})\Delta x_{n-1},\end{aligned}$$

qui a pour limite $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, est évidemment toujours comprise entre les deux suivantes, où m et M désignent la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre la fonction $f(x)$ quand x varie de x_0 à X,

$$m(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_{n-1}) = m(X - x_0),$$
$$M(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_{n-1}) = M(X - x_0);$$

il en sera par suite de même de la limite $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$; donc, G désignant une quantité comprise entre m et M, on aura

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = G(X - x_0).$$

Si la fonction $f(x)$ est continue entre x_0 et X, elle passera, comme l'on sait, par la valeur G pour une valeur de sa variable comprise entre x_0 et X. Une telle valeur peut être représentée par $x_0 + \theta(X - x_0)$, θ désignant un nombre compris entre o et 1; on a alors dans ce cas, au lieu de (1),

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)].$$

G sera le plus souvent une valeur de $f(x)$ correspondant à une valeur $x_0 + \theta(X - x_0)$ de x, comprise entre x_0 et X. Toutefois il n'en sera certainement ainsi que si l'on sait que $f(x)$ reste continu entre x_0 et X. Ainsi, dans le cas où $f(x)$ ne sera pas continu, la formule (2) devra être remplacée par (1).

Quatrième propriété. — *La dérivée de l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

prise par rapport à X *sera* $f(X)$, *si* $f(x)$ *est continu pour* $x = X$.

En effet, appelons y l'intégrale en question, h un accrois-

sement donné à X et k l'accroissement correspondant de y, on aura

$$k = \int_{x_0}^{X+h} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx;$$

or, d'après notre premier principe,

$$\int_{x_0}^{X+h} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{X+h} f(x)\,dx;$$

donc

$$k = \int_{X}^{X+h} f(x)\,dx$$

ou, d'après le principe précédent, si $f(x)$ est continu dans le voisinage de la valeur X de x,

$$k = h\,f(X + \theta h);$$

on déduit de là, en divisant les deux membres par l'accroissement h,

$$\frac{k}{h} = f(X + \theta h),$$

et, en faisant tendre h vers zéro, on tire

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dX} = f(X),$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration suppose h positif, mais on voit facilement comment il faudrait présenter les choses si h était négatif.

Corollaire. — *Toute fonction continue est la dérivée d'une autre fonction.*

Je dis qu'il existe une fonction ayant pour dérivée $f(x)$; en effet, considérons l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz = u,$$

que l'on écrit souvent ainsi

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

On vient de voir que $\frac{du}{dx} = f(x)$; la limite inférieure x_0 est arbitraire, il n'y a là rien qui puisse nous surprendre, car on sait qu'il existe une infinité de fonctions ayant même dérivée.

Cinquième propriété. — *On a en général, si $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$,*

$$\int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx = f(X) - f(x_0). \tag{1}$$

En effet, les deux membres de cette formule ont même dérivée relativement à X, d'après notre quatrième propriété : donc ils ne peuvent différer que par un terme indépendant de X. Pour trouver ce terme, faisons $X = x_0$, l'intégrale sera nulle, car $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = G(X - x_0)$ (quatrième propriété) et s'annule pour $X = x_0$; mais, pour $X = x_0$, le second membre est nul aussi; donc le terme indépendant de X dont devaient différer les deux membres de la formule (1) est nul, et cette formule a lieu. C. Q. F. D.

Toutefois cette formule (1) cesserait d'être exacte si la fonction $f(x)$ était discontinue entre x_0 et X; en effet, deux fonctions qui ont la même dérivée ne sont égales, à une constante près, qu'autant qu'elles sont *continues*. Une fonction discontinue peut très bien avoir sa dérivée nulle, et par suite deux fonctions ayant une dérivée nulle peuvent très bien différer entre elles par une fonction discontinue.

VII. — Généralisation de la notion d'intégrale définie.

Nous représenterons encore par la notation $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ la limite de l'expression

$$\left\{\begin{aligned} &f(x_0 + \theta_0 \Delta x_0)\Delta x_0 + f(x_1 + \theta_1 \Delta x_1)\Delta x_1 + \ldots \\ &\qquad + f(x_{n-1} + \theta_{n-1}\Delta x_{n-1})\Delta x_{n-1}, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

quand les quantités x_0, x_1, x_2, ..., X, au lieu d'être croissantes, seront décroissantes; ainsi, dans une intégrale définie, on pourra supposer la limite inférieure plus grande que la limite supérieure. L'expression (1) peut encore s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(x_1 - \lambda_0 \Delta x_0)\Delta x_0 + f(x_2 - \lambda_1 \Delta x_1)\Delta x_1 + \ldots \\ \qquad + f(X - \lambda_{n-1}\Delta x_{n-1})\Delta x_{n-1}, \end{array}\right.$$

λ_0, λ_1, ... désignant des quantités comprises entre 0 et 1; si l'on écrit les termes de cette somme dans un ordre inverse et si l'on observe que $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, si l'on pose enfin $x_1 = z_{n-1}$, $x_2 = z_{n-2}$, ..., $x_{n-1} = z_1$, on aura

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = z_{n-i-1} - z_{n-i} = -\Delta z_{n-i-1};$$

il viendra, au lieu de (2),

$$\begin{array}{l} -[f(X + \lambda_{n-1}\Delta X)\Delta X \\ \qquad + f(z_1 + \lambda_{n-2}\Delta z_1)\Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1} + \lambda_0 \Delta z_{n-1})\Delta z_{n-1}], \end{array}$$

c'est-à-dire par définition $-\int_X^{x_0} f(x)\,dx$.

On a donc la relation suivante, qui joue un rôle important dans la théorie des intégrales définies,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_X^{x_0} f(x)\,dx.$$

Cette formule est d'accord avec la formule

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx &= f(X) - f(x_0) \\ &= -[f(x_0) - f(X)] = -\int_X^{x_0} f'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Enfin, pour achever de définir le symbole $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, nous définirons $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{X} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ comme les limites vers lesquelles converge l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$: 1° quand X croît indéfiniment; 2° quand x_0 décroît indéfini-

ment; 3° quand x_0 et X tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$. Par exemple, $\int_1^X \frac{1}{x^2}dx$ est égal à $-\frac{1}{X}-(-1)$ ou à $1-\frac{1}{X}$: donc $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ sera la limite de $1-\frac{1}{X}$ pour $X=\infty$ ou 1.

VIII. — Des intégrales indéfinies.

Nous avons appelé *intégrale indéfinie* ou simplement *intégrale* de $f(x)$ une fonction dont la dérivée est $f(x)$. Cette fonction existe; en effet, $\int_{x_0}^x f(z)dz$ a pour dérivée, par rapport à x, $f(x)$; j'ajoute que, x_0 étant arbitraire, il y aura une infinité de fonctions ayant pour dérivée $f(x)$. Toutes ces fonctions, d'ailleurs, ayant la même dérivée $f(x)$ ne peuvent différer que par une constante. Ainsi

$$\int_{x_0}^x f(z)dz \quad \text{et} \quad \int_{z_0}^x f(z)dz$$

ont pour différence $\int_{x_0}^{z_0} f(z)dz$, qui est bien une constante, c'est-à-dire une quantité indépendante de x.

Une intégrale indéfinie n'est donc autre chose qu'une intégrale définie dont la limite inférieure est indéterminée. L'intégrale indéfinie de $f(x)$ se représente ainsi

$$\int f(x)dx,$$

notation équivalente à $\int_{z_0}^x f(z)dz$, z_0 étant indéterminé.

Exemple :

$$\int x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx = \int_{x_0}^x \left(\frac{z^2}{2}\right)' dz = \frac{x^2}{2} + \text{const.}$$

En général, on a

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + \text{const.}$$

Mais nous nous dispenserons d'écrire la constante, elle sera toujours sous-entendue et supposée comprise dans le signe $\int$; ainsi nous poserons

$$\int f'(x)\,dx = f(x),$$

et cette égalité aura lieu à une constante près. Comme on le voit, la notation $\int f(x)\,dx$ peut servir à représenter la fonction dont la dérivée est $f(x)$; nous l'adopterons pour cet usage, mais nous emploierons aussi dans quelques circonstances les notations $\frac{d^{-1}f}{dx^{-1}}$ ou $D^{-1}f(x)$ ou même $f^{-1}(x)$.

Quand on a

$$(1) \qquad f(x) = au + bv + cw + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant des constantes et $u, v, w, \ldots$ des fonctions de x, on en conclut

$$(2) \qquad \int f(x)\,dx = a\int u\,dx + b\int v\,dx + c\int w\,dx + \ldots.$$

En effet, en différentiant l'équation (2), on retombe sur (1); donc les deux membres de (2) sont égaux à une constante près. Cette proposition résulte d'ailleurs de ce qu'une intégrale indéfinie est une intégrale définie dont la limite inférieure est indéterminée.

Il est souvent utile d'observer que

$$\int u'\varphi'(u)\,dx = \varphi(u).$$

Ainsi $\int \frac{u'}{u}\,dx = \log u$; donc, par exemple,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Très souvent les fonctions que l'on a besoin d'intégrer sont

des sommes de fonctions dont l'intégrale nous est connue, ou des fonctions dont l'intégrale est connue *a priori* d'après l'expérience que l'on a du calcul des dérivées; ainsi l'on reconnaît que

$$\int \cos x\,dx = \sin x, \qquad \int e^x\,dx = e^x, \qquad \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \ldots;$$

l'intégration est alors dite immédiate. Mais très souvent aussi l'on a besoin de recourir à des procédés spéciaux pour découvrir l'intégrale de cette fonction donnée. Ce sont ces procédés que nous allons tout d'abord exposer, en avertissant qu'ils ne conduisent pas toujours au résultat cherché.

IX. — Intégration par parties.

La méthode d'intégration par parties repose sur l'application simple ou répétée de la formule

$$(1) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

On la démontre en observant que

$$duv = u\,dv + v\,du$$

ou, en intégrant,

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du;$$

en résolvant par rapport à $\int u\,dv$, on a la formule (1) qu'il fallait établir.

En appliquant cette formule à l'intégrale $\int \log x\,dx$, par exemple, et en faisant $\log x = u$, $dx = dv$, on a

$$\int \log x\,dx = x \log x - \int dx = x \log x - x.$$

X. — Différentiation sous le signe $\int$.

Un autre procédé d'intégration très fécond consiste à différentier une intégrale connue par rapport à un paramètre variable que l'on y introduit pour les besoins de la cause. Nous démontrerons d'abord la règle et nous la ferons suivre d'applications.

Soit

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx \tag{1}$$

une intégrale définie : nous supposerons que, pour des valeurs variables de α, $f(x, \alpha)$ reste fini et continu, quand x varie de x_0 à X ; nous supposerons aussi que la dérivée de $f(x)$ relative à α, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, reste finie et continue par rapport à x. En changeant alors α en $\alpha + h$, on a

$$u + \Delta u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha + h)\,dx$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta u}{h} = \int_{x_0}^{X} \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\,dx;$$

c'est-à-dire, en appelant ε un infiniment petit,

$$\frac{\Delta u}{h} = \int_{x_0}^{X} [f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon]\,dx.$$

Mais $\int_{x_0}^{X} \varepsilon\,dx$ est égal à une valeur E de ε comprise entre son maximum et son minimum multipliée par $X - x_0$; donc $\int_{x_0}^{X} \varepsilon\,dx$ tend vers zéro avec h, donc enfin

$$\lim \frac{\Delta u}{h} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx;$$

ce qui montre que, pour différentier une intégrale définie par rapport à un paramètre variable qu'elle contient, il

suffit de différentier par rapport à ce paramètre la quantité placée sous le signe $\int$.

Mais cette conclusion est soumise à cette restriction, que $f(x, \alpha)$ doit avoir une dérivée finie $f'_\alpha(x, \alpha)$ par rapport à x et α. Il faut aussi supposer les limites x_0 et X indépendantes de α. Nous verrons plus tard comment on devrait faire si x_0 et X étaient fonctions de α.

S'il s'agit d'une intégrale indéfinie, telle que

$$\int f(x, \alpha)\,dx,$$

on la supposera mise sous la forme

$$\int_{x_0}^{x} f(z, \alpha)\,dz \quad \text{ou} \quad \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\,dx;$$

et, s'il est possible de supposer x_0 assez rapproché de x pour que, entre les limites x_0 et x, $f(x, \alpha)$ ait une dérivée $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ finie et continue par rapport à x et α, on aura

$$\frac{\partial \int f(x, \alpha)\,dx}{\partial \alpha} = \int f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

De même, de l'équation

$$(1) \qquad u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx$$

on peut conclure

$$(2) \qquad \int_{a_0}^{A} u\,d\alpha = \int_{x_0}^{X} dx \left[\int_{a_0}^{A} f(x, \alpha)\,d\alpha \right].$$

En effet, en différentiant par rapport à A, on trouve

$$u(A) = \int_{x_0}^{X} f(x, A)\,dx$$

et, en particulier, comme cette formule a lieu, quel que soit A,

$$u(\alpha) = u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx.$$

Nous voyons que $\int_{a_0}^{A} u\,d\alpha$ et $\int_{x_0}^{X} dx \left[\int_{a_0}^{A} f(x,\alpha)\,d\alpha \right]$ ont même dérivée, en vertu de (1); donc leur différence est constante. Or, pour $A = a_0$, elle est nulle, donc elle est toujours nulle; la formule (2) est par suite exacte; on peut l'écrire

$$\int_{a_0}^{A} d\alpha \int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{a_0}^{A} f(x,\alpha)\,d\alpha,$$

mais toujours avec les mêmes restrictions relatives à la continuité. Une intégrale indéfinie se ramenant toujours à une intégrale définie, on pourra, comme l'on voit, intégrer une intégrale indéfinie par rapport à un paramètre variable en intégrant la quantité placée sous le signe $\int$.

Exemple. — On sait que l'on a

(1) $$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \log(x-\alpha);$$

en différentiant par rapport à α, il vient

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} = -\frac{1}{x-\alpha};$$

ce qui est exact. En intégrant au contraire depuis $\alpha = a_0$ jusqu'à $\alpha = a$, on trouve

$$-\int dx[\log(x-a) - \log(x-a_0)] = \int_{a_0}^{a} \log(x-\alpha)\,d\alpha.$$

XI. — Intégration par substitution.

Voici peut-être la plus importante des méthodes d'intégration; elle consiste dans un changement de variable. Considérons l'intégrale

$$u = \int f(x)\,dx;$$

on peut substituer à cette formule celle ci-après, qui est équivalente,

$$\frac{du}{dx} = f(x)$$

et, en remplaçant x par une fonction $\varphi(t)$ de t,

$$\frac{du}{d\varphi}\varphi'(t) = f(\varphi)\varphi'(t)$$

ou

$$\frac{du}{dt} = f(\varphi)\varphi'(t);$$

on en conclut

$$u = \int f(\varphi)\varphi'(t)\,dt,$$

et l'on a ainsi u en fonction de t, ce qui sera souvent plus commode que de l'avoir en fonction de x. En définitive, le calcul qu'on vient de faire consiste à remplacer x par φ et dx par $\varphi'(t)\,dt$.

Exemple. — En général, pour calculer $\int f(x \pm \alpha)\,dx$, on pourra, sans écrire de limites, poser

$$x \pm \alpha = t \quad \text{ou} \quad x = t \mp \alpha, \quad dx = dt,$$

et l'on aura

$$\int f(x \pm \alpha)\,dx = \int f(t)\,dt.$$

Dans les applications, il n'est pas nécessaire d'écrire les limites x_0 et x, s'il s'agit d'intégrales indéfinies, puisque t_0 est indéterminé comme x_0. Quand il s'agira d'intégrales définies, il faudra, au contraire, calculer avec soin la valeur t_0 de t qui correspond à $x = x_0$; mais nous reviendrons ailleurs sur cette observation, qui est d'une grande importance.

XII. — Intégration des fonctions rationnelles.

L'intégrale de x^m, tant que m est différent de -1, est égale à $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. L'intégrale de x^{-1} est $\log x$; on ne pourrait

pas la déduire de $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, comme on voit, en faisant $x = -1$, au moins directement. Mais, comme l'intégrale de x^m est aussi $\frac{x^{m+1} - c^{m+1}}{m+1}$, c désignant une constante arbitraire, on a cru pouvoir faire tendre m vers -1 dans cette expression qui tend elle-même, pour $m = -1$, vers $\log x$.

Quoi qu'il en soit, l'intégrale d'un polynôme, tel que

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

où a_0, a_1, a_2, ... sont des coefficients constants, sera

$$a_0 \int dx + a_1 \int x\,dx + \ldots + a_m \int x^m\,dx$$

ou

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_m \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

à une constante près que nous nous dispensons d'écrire, comme nous l'avons déjà dit.

Pour trouver l'intégrale d'une fonction rationnelle, on la décompose en un polynôme entier $E(x)$ et en une suite de fractions simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$ ou $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, ainsi qu'on apprend à le faire dans les *Éléments d'Algèbre*. Le polynôme $E(x)$ est facile à intégrer, comme on l'a vu. On a ensuite

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \int \frac{dx}{x-a} = A \log(x-a),$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = A \int dx (x-a)^{-m} = \frac{A(x-a)^{1-m}}{1-m}$$

ou

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -A \frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}.$$

Occupons-nous maintenant de l'intégrale

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx,$$

dans laquelle nous supposerons que $x^2 + px + q = 0$ a ses racines imaginaires. On peut l'écrire, en mettant en évidence la dérivée de $x^2 + px + q$,

$$\frac{1}{2}\int \frac{2Mx + Mp + 2N - Mp}{x^2 + px + q}\,dx$$

ou

$$\frac{1}{2}\int \frac{M(2x + p)}{x^2 + px + q}\,dx + \int \frac{N - \frac{1}{2}Mp}{x^2 + px + q}\,dx;$$

la première intégrale est de la forme

$$\frac{M}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx,$$

u désignant $x^2 + px + q$ ou

$$\frac{M}{2}\int \frac{d}{dx}(\log u)\,dx;$$

sa valeur est $\frac{M}{2}\log u$: on a donc

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} &= \tfrac{1}{2}M\log(x^2 + px + q) \\ &\quad + (N - \tfrac{1}{2}Mp)\int \frac{dx}{x^2 + px + q}. \end{aligned} \right.$$

Or

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p^2}{4} + q\right)}$$

$$= \int \frac{dx : \left(-\frac{p^2}{4} + q\right)}{1 + \left(\dfrac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2};$$

en posant alors

$$(2)\qquad \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = t, \qquad \frac{dx}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = dt.$$

il vient

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Mais on sait que la dérivée de arc tang t est $\frac{1}{1+t^2}$; $\int \frac{dt}{1+t^2}$ est donc égal à arc tang t, par suite

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \text{ arc tang } t;$$

et, en remplaçant t par sa valeur (2),

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \text{ arc tang } \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}};$$

la formule (1) donne alors

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\log(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \text{ arc tang } \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

En différentiant cette formule $n-1$ fois de suite par rapport à q et en multipliant par $\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$, on trouve

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[-\frac{M}{2}\,\frac{1.2\ldots(n-2)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}}\left(\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \text{ arc tang } \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)\right].$$

On sait ainsi intégrer toutes les parties dans lesquelles peut se décomposer une fraction rationnelle ; on pourra donc intégrer la fraction elle-même.

Première application :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{1-x} + \frac{dx}{1+x}\right) = \tfrac{1}{2}\log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1-x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Deuxième application :

$$\int \frac{x\,dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1}{1-x^2}.$$

Troisième application. — Calculer

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}.$$

Nous partirons de

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{dx}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a};$$

posant $a = \sqrt{\alpha}$, nous aurons

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tang} \alpha^{-\frac{1}{2}} x$$

et, en différentiant $m-1$ fois par rappport à α,

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \left(\alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tang} \alpha^{-\frac{1}{2}} x\right);$$

après quoi on remplacera α par a^2.

Quatrième application. — Trouver

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^m}.$$

On a

$$(1) \qquad \frac{1}{(1-x^2)^m} = \frac{A_m}{1-x} + \frac{A_{m-1}}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{B_m}{1+x} + \ldots;$$

A_m, A_{m-1}, ... sont les coefficients du quotient de la division de 1 par $[1-(1-z)^2]^m$ ou $(2z-z^2)^m$.

Le second membre de (1) ne devant pas changer quand on y remplace x par $-x$, il faudra que $A = B$; par suite,

$$\frac{1}{(1-x^2)^m} = A_m\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) + A_{m-1}\left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\right] + \ldots;$$

donc

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^m} = A_m \log \frac{1+x}{1-x} - A_{m-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) + \ldots.$$

XIII. — Nouvelle méthode pour intégrer les fonctions rationnelles.

La nouvelle méthode d'intégration est relative aux fractions de la forme $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$. La méthode précédente donnait l'expression *algébrique* de l'intégrale, mais il restait encore à effectuer un certain nombre de différentiations. Voici une méthode qui donne l'intégrale développée. (Elle s'applique d'ailleurs au cas où x^2+px+q aurait ses racines réelles.)

On commence par remplacer x^2+px+q par une somme de carrés $(x+\alpha)^2+\beta^2$; quant à $Mx+N$, il se met, à un facteur constant près, sous la forme $2(x+\alpha)+A$, A désignant une constante, et l'on est ramené aux deux intégrales

$$\int \frac{2(x+\alpha)}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}\,dx \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}.$$

Si l'on pose

$$(x+\alpha)^2+\beta^2 = u, \qquad 2(x+\alpha)\,dx = du,$$

la première prend la forme $\int \frac{du}{u^m}$ et s'intègre immédiatement. On n'a donc plus à s'inquiéter que de la seconde

$$\int \frac{dx}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m} = \frac{1}{\beta^{2m}} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^m};$$

on pose alors

$$\frac{x+\alpha}{\beta} = t, \qquad dx = \beta\,dt,$$

et l'on a

$$\int \frac{dx}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m} = \frac{1}{\beta^{2m-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}.$$

On est ainsi ramené à calculer $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$; on y arrive comme il suit : on pose

$$A_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \int \frac{dt(1+t^2)}{(1+t^2)^m} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^m}$$

ou

$$A_m = A_{m-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^m}$$

ou

$$A_m = A_{m-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2t.dt}{(1+t^2)^m}\,t.$$

On applique alors la règle d'intégration par parties

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

on prend $\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^m} = dv$ et $t = u$: on a alors

$$v = -\frac{1}{(m-1)(1+t^2)^{m-1}}$$

et, par suite (p. 28),

$$A_m = A_{m-1} + \frac{1}{2m-2}\,\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} - \int \frac{1}{2m-2}\,\frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$$

ou, en observant que l'intégrale est égale à $\frac{A_{m-1}}{2m-2}$,

$$A_m = A_{m-1}\,\frac{2m-3}{2m-2} + \frac{1}{2m-2}\,\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}}.$$

En faisant dans cette formule $m = 2, 3, \ldots$, en observant que

$$A_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang}\,t,$$

on trouve

$$A_2 = A_1\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{t}{(1+t^2)},$$

$$A_3 = A_2\,\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{t}{(1+t^2)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

on en tire

$$A_1 = \text{arc tang}\, t,$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\, t - \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2},$$

$$A_3 = \frac{1.3}{2.4}\,\text{arc tang}\, t + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{4}\,\frac{t}{(1+t^2)^2},$$

. . . .

(*Voir* les exercices 1 et 4 à la fin du Chapitre).

XIV. — Sur les intégrales des fonctions imaginaires.

Il y a souvent avantage à considérer une fonction réelle comme la somme ou la différence de deux fonctions imaginaires, et à faire porter l'intégration sur ces fonctions imaginaires. Étant donnée une fonction $X + Y\sqrt{-1}$, imaginaire de x, dans laquelle X et Y sont des fonctions réelles de x, il est clair qu'elle a une intégrale et que cette intégrale est

$$\int X\,dx + \left(\int Y\,dx\right)\sqrt{-1}.$$

En effet, la dérivée de cette quantité est bien $X + Y\sqrt{-1}$; en second lieu, comme

$$\int_{x_0}^{x} X\,dx = \lim \sum_{x_0}^{x} X\,\Delta x, \qquad \int_{x_0}^{x} Y\,dx = \lim \sum_{x_0}^{x} Y\,\Delta x,$$

il est évident que l'on aura

$$\int_{x_0}^{x} (X + Y\sqrt{-1})\,dx = \lim\left(\sum_{x_0}^{x} X\,\Delta x + \sqrt{-1}\sum_{x_0}^{x} Y\,\Delta x\right).$$

Si l'on voulait obtenir l'intégrale de $\frac{1}{(x^2+1)^m}$ sous forme algébrique, on pourrait écrire

$$\frac{1}{(x^2+1)^m} = \frac{A}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{-1}} - \frac{1}{x+\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ \frac{B}{4\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^2} - \frac{1}{(x+\sqrt{-1})^2}\right] + \ldots$$

et déterminer A, B, ...; l'intégration donnerait alors le résultat sous forme imaginaire. Mais cette façon d'intégrer les fractions rationnelles est peu usitée.

XV. — Intégration des fonctions rationnelles de x et d'un radical.

Après avoir intégré les fractions rationnelles, on a dû chercher à intégrer les fonctions irrationnelles. Le monôme x^m s'intègre, quel que soit m, et donne $\frac{x^{m+1}}{m+1}$; on a dû tenter alors l'intégration des fonctions de la forme $\sqrt[m]{F(x)}$, où $F(x)$ désignait un polynôme quelconque; mais on a bien vite reconnu la difficulté d'un pareil problème, et, dans les éléments du Calcul intégral, on se borne à montrer que les fonctions rationnelles de x et d'un radical, tel que $\sqrt{ax^2+bx+c}$, où a, b, c sont des constantes, est toujours intégrable en termes finis; l'intégrale du radical $\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$ engendre déjà une transcendante nouvelle, la fonction *elliptique,* qui n'est réductible à aucun type de fonction étudié jusqu'à présent. L'objet de ce paragraphe sera l'intégration des différentielles de la forme

$$F(x, R)dx,$$

F désignant une fonction rationnelle de x et de

$$R = \sqrt{ax^2+bx+c},$$

a, b, c désignant des constantes.

Une pareille expression est toujours intégrable, en termes finis, car elle se ramène théoriquement à une fonction rationnelle, et cela de plusieurs manières :

1° Si l'on pose

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+z,$$

on a, en élevant au carré,

$$bx+c = 2zx\sqrt{a}+z^2,$$

$$x = \frac{z^2-c}{b-2z\sqrt{a}};$$

x et dx seront donc rationnels en z; quant à $\sqrt{ax^2+bx+c}$, il est égal à $x\sqrt{a}+z$, et, par suite, il est aussi rationnel; l'intégrale

$$\int F(\sqrt{ax^2+bx+c}, x)\,dx$$

prendra donc la forme

$$\int \Phi(z)\,dz,$$

où Φ sera une fonction rationnelle.

Exemple. — Soit à calculer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

On pose

$$\sqrt{x^2+a^2} = x+z,$$

$$a^2 = 2zx + z^2, \qquad x = \frac{a^2-z^2}{2z}, \qquad dx = -\frac{z^2+a^2}{2z^2}\,dz,$$

et l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\int \frac{dz}{z} = -\log z = -\log(\sqrt{x^2+a^2}-x)$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}-x} = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) - 2\log a;$$

et, comme le résultat a lieu à une constante près, on peut écrire

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

Cette formule est à retenir.

2° Quand le coefficient de x^2 est négatif, la transformation précédente introduit des imaginaires; on peut alors appliquer la suivante : on pose

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+ux;$$

on a alors, en élevant au carré,

$$ax^2+bx = 2ux\sqrt{c}+u^2x^2.$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{u\sqrt{c} - b}{a - u^2};$$

x, le radical, et dx sont alors rationnels en u et du et l'on est ramené à intégrer une fonction rationnelle de u.

3° Quand a et c sont négatifs tous les deux, on ne peut plus, sans introduire d'imaginaires, appliquer les méthodes précédentes. Si alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ a ses racines α, β réelles (s'il n'avait pas ses racines réelles, le radical, portant sur une quantité essentiellement négative, serait alors imaginaire et l'on ne pourrait éviter l'emploi de ces quantités), on écrit

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)},$$

et l'on est conduit à intégrer une expression de la forme

$$\int dx\, \mathrm{F}\left[x, \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}\right],$$

où F est une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}$; on pose alors

$$\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} = (x - \alpha)\sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}},$$

$$z^2 = \frac{\beta - x}{x - \alpha},$$

d'où l'on tire x, dx et $\sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$ sous forme rationnelle en z, et le problème se trouve ramené à l'intégration d'une fonction rationnelle. La même méthode s'applique aussi au cas où a et c ne sont pas négatifs.

Exemple. — Soit à intégrer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{\frac{x + a}{x - a}}}.$$

On posera

$$\frac{x+a}{x-a} = z^2;$$

d'où

$$x = a\,\frac{z^2+1}{z^2-1}, \qquad dx = -a\,\frac{4z}{(z^2-1)^2}\,dz,$$

et l'on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{2\,dz}{1-z^2} = \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) dz = \log\frac{1+z}{1-z}.$$

En remplaçant z par sa valeur, nous aurons

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}}$$

ou

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right),$$

en n'écrivant pas la constante $-2\log(\sqrt{-a})$ dans le second membre, ce qui est inutile.

On pourrait de la même théorie déduire l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

mais il vaut mieux observer que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}.$$

Ces trois formules

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

sont importantes : il est bon de les retenir.

XVI. — Méthode rapide pour le calcul de l'intégrale d'une fonction rationnelle de x et d'un radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Si nous désignons par R le radical $\sqrt{ax^2+bx+c}$, toute fonction rationnelle de x et du radical pourra se mettre sous la forme

$$f=\frac{\varphi(x, R)}{\psi(x, R)},$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières de x et de R. Or toute fonction de x et de R entière se ramène à la forme $A+BR$, où A et B sont des fonctions entières de x ; on peut donc écrire

$$f=\frac{A+BR}{C+DR},$$

A, B, C, D désignant des fonctions entières de x. Si l'on multiplie alors haut et bas par $C-DR$, on est ramené à la forme

$$f=\frac{P+QR}{S}, \qquad S=C^2-D^2R^2,$$

où P, Q, S sont fonctions entières de x ; on a d'ailleurs

$$f=\frac{P}{S}+\frac{QR}{S},$$

ce que l'on peut encore écrire

$$f=\frac{P}{S}+\frac{QR^2}{RS}.$$

Si l'on veut alors intégrer la fonction f, on sera ramené à intégrer la fonction rationnelle $\frac{P}{S}$ (que l'on sait intégrer) et une expression de la forme

$$\frac{N}{M}\frac{1}{R},$$

où $\frac{N}{M}$ est une fonction rationnelle. En la décomposant en élé-

ments simples, on est finalement ramené à une somme de termes de la forme

$$\frac{x^m}{R}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)^m R}, \quad \frac{\mu x + \nu}{(x^2 + px + q)^n R},$$

m, α, μ, ν, p, q désignant des constantes, et que nous allons apprendre à intégrer successivement.

Avant toute intégration, il sera bon de ramener par un changement de variable le radical $R = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ à l'une des formes $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$; à cet effet, on mettra $ax^2 + bx + c$ sous la forme d'une somme ou d'une différence de deux carrés; on aura alors l'une des combinaisons

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = \quad (mx + n)^2 + k^2,$$

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = \quad (mx + n)^2 - k^2,$$

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = -(mx + n)^2 + k^2,$$

où m, n, k sont des constantes.

J'exclus le cas où $ax^2 + bx + c$ serait un carré, parce que la fonction à intégrer ne serait plus irrationnelle ; j'exclus aussi le cas où $ax^2 + bx + c = -(mx+n)^2 - k^2$, qui se réduira au cas (1) en mettant en évidence l'imaginaire $\sqrt{-1}$ que l'on ne peut éviter. On posera

$$mx + n = z, \qquad dx = \frac{dz}{m},$$

et l'on aura l'une des formes suivantes de l'intégrale à calculer

$$\int \varphi(z, \sqrt{z^2 \pm k^2})\, dz, \quad \int \varphi(z, \sqrt{k^2 - z^2})\, dz.$$

Ainsi nous supposerons toujours le radical de la forme

$$\sqrt{z^2 \pm k^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{k^2 - z^2}.$$

(Cette restriction n'est pas absolument nécessaire, mais elle simplifie généralement les calculs.)

Intégration de $\dfrac{x^m\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}$. — On posera

$$(1) \qquad \mathrm{A}_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}};$$

puis, en observant que

$$d.x^m\sqrt{k^2-x^2} = \left(m x^{m-1}\sqrt{k^2-x^2} - \frac{x^{m+1}}{\sqrt{k^2-x^2}}\right)dx$$

ou

$$d.x^m\sqrt{k^2-x^2} = [mk^2x^{m-1} - (m+1)x^{m+1}]\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

en intégrant et en ayant égard à (1), on trouve

$$x^m\sqrt{k^2-x^2} = mk^2\mathrm{A}_{m-1} - (m+1)\mathrm{A}_{m+1};$$

on en conclut

$$(2) \qquad \mathrm{A}_{m+1} = \frac{mk^2}{m+1}\mathrm{A}_{m-1} - \frac{x^m}{m+1}\sqrt{k^2-x^2}.$$

Or on sait que

$$\mathrm{A}_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{k},$$

$$\mathrm{A}_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = -\sqrt{k^2-x^2}.$$

La formule (2) donne alors, en y faisant $m = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\mathrm{A}_2 = \frac{k^2}{2}\mathrm{A}_0 - \frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2}, \qquad \mathrm{A}_3 = \frac{2k^2}{3}\mathrm{A}_1 - \frac{x^2}{3}\sqrt{k^2-x^2},$$

$$\mathrm{A}_4 = \frac{3k^2}{4}\mathrm{A}_2 - \frac{x^3}{4}\sqrt{k^2-x^2}, \qquad \mathrm{A}_5 = \frac{4k^2}{5}\mathrm{A}_3 - \frac{x^4}{5}\sqrt{k^2-x^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et un calcul simple fait connaître successivement $\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \ldots.$ Comme on le voit, pour connaître A_{2m}, il suffit de connaître A_0; A_1 ne concourt pas à le former et A_{2m} est transcendant. Au contraire, A_{2m+1} est algébrique et ne dépend que de A_1. La même méthode s'applique à l'intégrale $\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}}$.

Intégration de $\dfrac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$. — Quand le binôme $(x-\alpha)^m$ entre au dénominateur de la fonction simple à intégrer, il n'y a pas, en général, avantage à simplifier le radical : aussi le conservons-nous sous la forme primitive.

On a identiquement

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+(x-\alpha)(b+2a\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$$

ou, pour abréger,

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+b'(x-\alpha)+c';$$

donc

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int\frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^m\sqrt{a(x-\alpha)^2+b'(x-\alpha)+c'}};$$

si alors on pose

$$x-\alpha = \frac{1}{z},\qquad d(x-\alpha) = -\frac{dz}{z^2},$$

on trouve

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int\frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{a+b'z+c'z^2}}.$$

On est alors ramené à un cas déjà étudié, et que l'on traitera facilement en mettant $a+b'z+c'z^2$ sous la forme d'une somme de carrés.

Les expressions de la forme $\displaystyle\int\frac{dx(\mu x+\nu)}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ sont assez pénibles à intégrer ; peut-être convient-il de les traiter par l'une des méthodes exposées plus haut et de les rendre rationnelles.

Faisons observer, en terminant ces considérations, que l'intégrale de $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ est $-\arcsin\dfrac{1}{x}$. On la trouve en remplaçant la variable x par $\dfrac{1}{z}$.

Enfin il est clair que, si l'on a trouvé

$$f(\alpha, x) = \int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{x^2+px+q}},$$

on aura

$$\frac{d^{n-1}f}{d\alpha^{n-1}}\,\frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{x^2+px+q}};$$

si l'on a trouvé

$$\int \frac{dx(\mu x+\nu)}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

pour le cas où $m=1$, on aura la valeur générale de cette intégrale en différentiant $m-1$ fois la valeur qui correspond au cas où $m=1$ par rapport à q et en multipliant le résultat par $\frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}$.

(*Voir* l'exercice 2 à la fin du Chapitre).

XVII. — Intégration de quelques fonctions réductibles aux fonctions rationnelles.

Les intégrales de la forme

$$\int dx\,\mathrm{F}(x, \sqrt{a-x}, \sqrt{b-x}),$$

où F est une fonction rationnelle de x, $\sqrt{a-x}$ et $\sqrt{b-x}$, se ramènent aux fonctions rationnelles ou plutôt aux fonctions rationnelles de x et d'un radical. Si l'on pose, en effet, $a-x=z^2$ ou $x=a-z^2$, elles prennent la forme

$$-2\int z\,dz\,\mathrm{F}(a-z^2, z, \sqrt{b-a+z^2}).$$

On peut parfois simplifier la substitution. Ainsi

$$\int dx\sqrt{\frac{a-x}{b-x}}$$

se simplifie en posant $\frac{a-x}{b-x}=\theta^2$.

Nous considérerons encore les expressions de la forme

$$\int \mathrm{F}(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \ldots)\,dx,$$

où F est une fonction rationnelle, et α, β, γ, ... des fractions quelconques. Soit δ le plus petit multiple des dénominateurs des fractions α, β, γ, ... Si l'on pose $x^{\frac{1}{\delta}} = z$, où $x = z^\delta$, l'intégrale proposée se changera dans la suivante

$$\int \delta z^{\delta-1} F(z^{\alpha\delta}, z^{\beta\delta}, z^{\gamma\delta}, \ldots) dz,$$

et cette fois la quantité placée sous le signe $\int$ ne contient plus que des exposants entiers.

Une transformation analogue réussirait encore, si l'on avait à considérer une intégrale de la forme

$$\int F[(a-x)^\alpha, (a-x)^\beta, (a-x)^\gamma, \ldots] dx.$$

XVIII. — Intégration des différentielles binômes.

On a donné le nom de *différentielles binômes* aux expressions de la forme

$$(1) \qquad x^m(a + bx^n)^p dx,$$

a, b, m, n, p désignant des quantités indépendantes de x; les trois dernières sont supposées rationnelles.

On peut toujours ramener le calcul de l'intégrale

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx$$

au cas où m et n sont entiers. En effet, supposons que, m et n étant réduits au même dénominateur, on ait

$$m = \frac{\mu}{\delta}, \qquad n = \frac{\nu}{\delta},$$

μ, ν, δ désignant des entiers. En posant

$$x = z^\delta, \qquad dx = \delta z^{\delta-1} dz,$$

on aura

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx = \int \delta z^{\mu+\delta-1}(a + bz^\nu)^p dz.$$

L'intégrale transformée est de la même forme que la proposée, et les exposants de z sont entiers.

On peut aussi supposer n positif; car, s'il était négatif, on pourrait écrire la différentielle binôme sous la forme

$$x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx,$$

dans laquelle l'exposant de x dans la parenthèse est positif quand n est négatif.

On peut intégrer les différentielles binômes dans deux cas : 1° quand $\frac{m+1}{n}$ est entier; 2° quand $\frac{m+1}{n}$, n'étant pas entier, augmenté de p, fournit une somme entière; en d'autres termes, quand $\frac{m+1}{n}+p$ est entier. M. Tchebycheff a démontré que c'étaient là les seuls cas dans lesquels on pouvait effectuer l'intégration au moyen des fonctions algébriques et logarithmiques directes ou inverses. Nous verrons plus loin un moyen de reconnaître si une fonction irrationnelle quelconque peut s'intégrer de cette manière.

Démontrons d'abord que, si $\frac{m+1}{n}$ est un entier e, on peut intégrer la différentielle (1); on a alors

$$m = ne - 1 = n(e-1) + n - 1$$

et

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int x^{n(e-1)}\,nx^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx;$$

posons alors $a+bx^n=t$, $nbx^{n-1}\,dx=dt$, et nous aurons

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{nb}\int t^p\left(\frac{t-a}{b}\right)^{e-1}dt.$$

Si $e-1$ est positif, on pourra développer $(t-a)^{e-1}$ par la formule du binôme, et l'on n'aura plus à intégrer que des termes de la forme t^α; si $e-1$ est négatif, on achèvera l'intégration en faisant un nouveau changement de variable. Soit $p=\frac{u}{v}$, u et v désignant deux entiers, on posera

$$t = z^v, \qquad dt = vz^{v-1}\,dz,$$

et l'on trouvera

$$\int x^m (a + b x^n)^p \, dx = \frac{v}{nb} \int z^{u+v-1} \left(\frac{z^v - a}{b} \right)^{e-1} dz;$$

on sera ainsi ramené à intégrer une fraction rationnelle.

Maintenant supposons que $\frac{m+1}{n} + p = e$, e désignant un entier; on aura

$$x^m (a + b x^n)^p \, dx = x^{m+np} (a x^{-n} + b)^p \, dx,$$

et, en appliquant ce qui vient d'être dit à la nouvelle différentielle, on voit qu'elle sera intégrable si $\frac{m + np + 1}{-n}$ est entier ou si $\frac{m+1}{n} + p$ l'est lui-même.

La méthode d'intégration par parties ou celle de la différentiation sous le signe $\int$ sont souvent plus rapides que celles que nous venons de signaler. Ainsi, par exemple, on a

$$\int n x^{n-1} (p + 1)(a + b x^n)^p \, dx = (a + b x^n)^{p+1} b^{-1};$$

en différentiant i fois par rapport à b, nous aurons

$$\int n x^{n(i+1)-1} (p + 1)(a + b x^n)^{p-i} p(p-1) \ldots (p - i + 1) \, dx$$
$$= \frac{d^i (a + b x^n)^{p+1} b^{-1}}{db^i},$$

et en changeant $p - i$ en q,

$$\int n(q+1)(q+2) \ldots (q+i+1) x^{n(i+1)-1} (a + b x^n)^q \, dx$$
$$= \frac{d^i (a + b x^n)^{q+i+1} b^{-1}}{db^i}.$$

On peut appliquer la méthode d'intégration par parties à l'intégrale

$$A_m = \int x^m (a + b x^n)^p \, dx.$$

A cet effet, différentions l'expression placée sous le signe $\int$, nous trouverons

$$d[x^m(a+bx^n)^p] = mx^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx + pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$
$$= [mx^{m-1}a(a+bx^n)^{p-1} + mbx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}$$
$$+ pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}]\,dx.$$

c'est-à-dire, en changeant p en $p+1$ et en intégrant,

$$x^m(a+bx^n)^{p+1} = ma\,\mathrm{A}_{m-1} + b(m+np+n)\,\mathrm{A}_{m+n-1},$$

formule de réduction permettant d'augmenter ou de diminuer à volonté l'exposant de x en dehors de la parenthèse de la quantité n.

On peut aussi faire porter la réduction sur l'exposant p; en effet, on a toujours

$$d.x^m(a+bx^n)^p$$
$$= mx^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx + pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$
$$= [x^{m-1}(a+bx^n)^p(np+m) - apnx^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}]\,dx;$$

de sorte que, si l'on pose

$$\mathrm{A}_p = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

il viendra, en intégrant et en changeant m en $m+1$,

$$x^{m+1}(a+bx^n)^p = (np+m+1)\,\mathrm{A}_p - apn\,\mathrm{A}_{p-1}.$$

Il résulte de là que :

Toute intégrale de différentielle binôme peut être ramenée à la forme

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

où m, n sont entiers et où p est compris entre zéro et l'unité, si l'on ne peut pas la ramener au cas où $p=0$; enfin on peut supposer $m<n$ et $n>0$.

Exemple. — Considérons l'intégrale

$$\int (a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\,dx;$$

pour la calculer nous poserons

$$A_p = \int (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}} dx,$$

et nous différentierons l'expression

$$x^m (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}};$$

nous aurons alors

$$\frac{d}{dx} x^m (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}}$$
$$= m x^{m-1} (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}} - p x^{m+1} (a^2 + x^2)^{-\frac{p+2}{2}}$$
$$= (m - p) x^{m-1} (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}} + a^2 p x^{m-1} (a^2 + x^2)^{-\frac{p+2}{2}}$$

ou, en intégrant et en faisant $m = 1$,

$$x (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}} = (1 - p) A_p + a^2 p A_{p+2}$$

ou

$$A_{p+2} = - A_p \frac{1 - p}{a^2 p} + \frac{x}{a^2 p} (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}}.$$

Ainsi

$$A_5 = \frac{4 A_3}{5 a^2} + \frac{x}{5 a^2} (a^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$A_3 = \frac{2 A_1}{3 a^2} + \frac{x}{3 a^2} (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}};$$

or A_1 est égal à $\log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$: la valeur de A_5 est par suite connue. D'ailleurs, en différentiant p fois par rapport à α la formule

$$\log(x + \sqrt{\alpha + x^2}) = \int dx (x^2 + \alpha)^{-\frac{1}{2}},$$

on arriverait également au but.

XIX. — Intégrales des fonctions exponentielles.

1° L'intégrale de e^{ax} est $\frac{e^{ax}}{a}\cdot$ En général, l'intégrale de $F(e^{ax})$, où F désigne une fonction rationnelle, s'obtient faci-

lement en posant $e^{ax} = z$, et, par suite, $a\,dx . e^{ax} = dz$; d'où l'on tire

$$dx = \frac{dz}{a}\, e^{-ax} = \frac{dz}{az};$$

on a alors

$$\int \mathrm{F}(e^{ax})\,dx = \int \mathrm{F}(z)\,\frac{dz}{az}.$$

Exemples :

$$\int \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}\,dx = \int \frac{z - z^{-1}}{z + z^{-1}}\,\frac{dz}{az}.$$

On peut aussi observer que, à un facteur près a, le numérateur de la quantité à intégrer est la différentielle du dénominateur; donc

$$\int \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}\,dx = \frac{1}{a}\log(e^{ax} + e^{-ax});$$

de même

$$\int \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}}\,dx = \frac{1}{a}\log(e^{ax} - e^{-ax}).$$

2° Lorsque les quantités a, b, c, ... ont une commune mesure δ, l'intégrale

$$\int \mathrm{F}(e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}, \ldots)\,dx$$

s'obtient en posant $e^{\delta x} = z$. On a alors

$$dx = \frac{dz}{\delta z}$$

et, par suite,

$$\int \mathrm{F}(e^{ax}, e^{bx}, \ldots)\,dx = \frac{1}{\delta}\int \frac{dz}{z}\,\mathrm{F}(z^{\alpha}, z^{\beta}, \ldots);$$

de sorte que, si la fonction F est rationnelle, on pourra toujours effectuer l'intégration par les méthodes exposées plus haut.

3° Proposons-nous maintenant d'intégrer, quand ce sera possible, une expression de la forme

$$\int \mathrm{F}(e^{ax}, e^{bx}, \ldots, x)\,dx,$$

où F désigne une fonction rationnelle. Nous supposerons les nombres a, b, c, ... commensurables et nous poserons

$$a = m\delta, \quad b = n\delta, \quad \ldots,$$

m, n, ... désignant des entiers. En faisant alors

$$\delta x = z,$$

l'intégrale prend la forme

$$\int \mathrm{F}\left(e^{mz}, e^{nz}, \ldots, \frac{z}{\delta}\right)\frac{dz}{\delta},$$

et l'on est ramené à intégrer une fonction rationnelle de z et de e^z.

Les fonctions rationnelles de x et de e^x ne sont pas intégrables en termes finis, quand on leur laisse toute leur généralité; mais, quand elles sont entières, elles se décomposent en termes de la forme

$$e^{ax}f(x),$$

où $f(x)$ désigne une fonction entière de x. Nous allons intégrer cette fonction sans qu'il soit même nécessaire de faire aucune hypothèse sur a. On a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int e^{ax}f(x)\,dx &= \frac{e^{ax}}{a}f(x) - \int \frac{e^{ax}}{a}f'(x)\,dx\\ &= \frac{e^{ax}}{a}f(x) - \frac{e^{ax}}{a^2}f'(x) + \int \frac{e^{ax}}{a^2}f''(x)\,dx,\end{aligned}$$

et ainsi de suite; on a donc, en arrêtant l'opération quand on rencontre une dérivée nulle de $f(x)$,

$$\int e^{ax}f(x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[f(x) - \frac{1}{a}f'(x) + \frac{1}{a^2}f''(x) - \ldots\right];$$

on vérifie d'ailleurs ce résultat par une simple différentiation.

Les expressions de la forme $\frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^m}$, dans lesquelles on peut toujours décomposer une expression telle que $f(x)e^{ax}$, quand $f(x)$ est une fonction non entière, mais rationnelle,

peuvent se ramener à des types plus simples; posons en effet

$$\theta(x) = \int \frac{e^{ax}}{x-\alpha}\,dx,$$

nous aurons, en différentiant par rapport à α,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^2}\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} = \int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^3}\,dx,$$

et ainsi de suite. Malheureusement, la fonction θ ne peut pas être exprimée par les fonctions élémentaires dont on fait usage en Analyse, tout au plus peut-on ramener la fonction θ au cas où $\alpha = 0$, en faisant un changement de variable et en posant $z = x - \alpha$.

Toutefois il pourra arriver, mais exceptionnellement, que $e^{ax}f(x)$ puisse s'intégrer, et en effet, décomposant $f(x)$ en éléments simples, on aura, en supposant le degré du numérateur inférieur à celui du dénominateur,

$$\int e^{ax}f(x) = \int \sum e^{ax}\left[\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots\right]dx,$$

$A_1, A_2, \ldots$ désignant des coefficients constants, ainsi que $\alpha, \ldots$. Or l'intégration par parties donne

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^2}\,dx = \frac{e^{ax}}{x-\alpha} - a\int \frac{e^{ax}}{x-\alpha}\,dx,$$

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^3}\,dx = \frac{1}{2}\frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^2} - \frac{a}{2}\int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^2}\,dx;$$

on voit, en continuant, que $\int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^m}\,dx$ s'exprimera sous la forme

$$e^{ax}\psi(x) + M\theta(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction rationnelle et M une constante; l'intégrale de $f(x)e^{ax}$ sera de la même forme, et, s'il arrive que M s'annule, on obtiendra en termes finis l'intégrale en question.

En définitive, si $f(x)e^{ax}$ peut s'intégrer, son intégrale pourra être représentée par $\psi(x)e^{ax}$, et l'on aura

$$f(x)\,e^{ax} = \frac{d}{dx}\,\psi(x)\,e^{ax} = \psi'(x)\,e^{ax} + a\,\psi(x)\,e^{ax}$$

ou bien

$$f(x) = \psi'(x) + a\,\psi(x).$$

Telle est la forme que devra affecter $f(x)$ pour que l'intégration soit possible. On pourrait préciser davantage les conditions d'intégrabilité, mais ce serait tout à fait dénué d'intérêt; qu'il nous suffise d'observer que l'intégration ne sera jamais possible en termes finis et sans le secours de la fonction θ, si le dénominateur de $f(x)$ contient des facteurs simples.

XX. — Intégrales des fonctions logarithmiques.

Soit $F(x, \log x)$ une fonction rationnelle de x et de $\log x$; en posant

$$x = e^z, \qquad dx = e^z\,dz,$$

on a

$$\int F(x, \log x)\,dx = \int F(e^z, z)\,e^z\,dz$$

L'intégration est ramenée à un cas examiné dans le paragraphe précédent.

L'intégrale $\int \frac{dx}{\log x}$ se ramène à $\int \frac{e^z\,dz}{z}$ en remplaçant x par e^z; elle dépend donc de la fonction que nous avons appelée tout à l'heure θ, et ne peut pas s'obtenir sous forme finie.

Quand m et n sont entiers et positifs, l'intégrale

$$\int x^m (\log x)^n\,dx$$

peut s'obtenir sous forme finie; en effet, on a

$$d[x^m(\log x)^n] = m x^{m-1}(\log x)^n\,dx + n x^{m-1}(\log x)^{n-1}\,dx.$$

Si l'on pose

$$\int x^m (\log x)^n \, dx = A_n$$

et si l'on intègre les deux membres de la précédente formule en y changeant m en $m+1$, on aura

$$(1) \qquad x^{m+1}(\log x)^n = (m+1)A_n + n A_{n-1},$$

formule qui permettra de calculer A_n quand on connaîtra A_{n-1}; on a

$$A_0 = \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

et, d'après la formule (1),

$$x^{m+1} \log x = (m+1) A_1 + A_0,$$
$$x^{m+1} (\log x)^2 = (m+1) A_2 + 2 A_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on tire

$$A_1 = \frac{x^{m+1} \log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2},$$
$$A_2 = \frac{x^{m+1} (\log x)^2}{m+1} - \frac{2x^{m+1} \log x}{(m+1)^2} + \frac{2x^{m+1}}{(m+1)^3},$$

et ainsi de suite.

XXI. — Intégrales des fonctions trigonométriques.

L'intégration des fonctions trigonométriques peut se ramener à celle des fonctions exponentielles, en observant que l'on a

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

mais on peut, en général, éviter l'emploi des imaginaires.

Nous nous occuperons tout d'abord de l'intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et de $\cos x$.

Soit $F(\sin x, \cos x)$ une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$; si l'on pose

$$\tang \tfrac{1}{2} x = z, \qquad x = 2 \operatorname{arc\,tang} z, \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2};$$

on aura

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \qquad \sin x = \frac{2z}{1 + z^2}$$

et, par suite,

$$\int F(\sin x, \cos x)\,dx = \int F\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

L'intégration d'une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$ se ramène donc à celle d'une fonction rationnelle de la variable z.

Exemples. — 1° On a

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2\,dz}{1+z^2}\,\frac{1+z^2}{2z} = \int \frac{dz}{z} = \log z;$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x.$$

2° On a

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2\,dz}{1-z^2} = \int dz\left[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right] = \log\frac{1+z}{1-z};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{x}{2}} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$$

ces deux intégrales sont à retenir.

3° Proposons-nous de calculer

$$\int \frac{dx}{\cos a - \cos x}.$$

On a, en posant toujours $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = z$,

$$\int \frac{dx}{\cos a - \cos x} = \int \frac{2\,dz}{\cos a(1+z^2) - (1-z^2)},$$

et l'on est encore ramené à intégrer une fonction rationnelle.

Il est quelquefois avantageux de prendre $\operatorname{tang} x$ pour variable; cela aura lieu quand la fonction $F(\sin x, \cos x)$ sera

décomposable en fonctions homogènes de degré pair en $\sin x$ et $\cos x$. En effet, considérons la fonction homogène

$$F(\sin x, \cos x)$$

de degré $2n$; si l'on pose

$$\operatorname{tang} x = z,$$

on aura

$$x = \operatorname{arc\,tang} z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}};$$

donc

$$\int F(\sin x, \cos x)\,dx = \int F\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)\frac{dz}{1+z^2};$$

mais une fonction homogène de degré pair de $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ et de $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ est une fonction rationnelle de z; on est donc ramené aux fonctions rationnelles.

Exemple. — On a

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{z\,dz}{1+z^2} = \tfrac{1}{2}\log(1+z^2)$$
$$= \log\sqrt{1+z^2} = -\log\cos x,$$

ce qui était évident en observant que

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = -\log\cos x.$$

On a de même

$$\int \cot x\,dx = \log\sin x.$$

Nous citerons encore, mais sans en faire d'applications, la méthode qui consisterait à poser, par exemple,

$$\sin x = z;$$

on a alors

$$\int F(\cos x, \sin x)\,dx = \int F(\sqrt{1-z^2}, z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

et l'on est ramené à l'intégration d'une fonction rationnelle de z et de $\sqrt{1-z^2}$.

XXII. — Intégration de $\sin^a x \cos^b x$.

Nous allons appliquer les méthodes précédentes à l'intégration de $\sin^a x \cos^b x$, dans le cas où a et b sont entiers.

Si l'un des deux nombres a et b est de la forme $2n+1$, l'intégration sera très simple. Supposons, par exemple,

$$b = 2n+1;$$

on aura

$$\int \sin^a x \cos^b x\,dx = \int \sin^a x(1-\sin^2 x)^n \cos x\,dx$$

et, en posant

$$\sin x = z, \qquad \cos x\,dx = dz,$$

il viendra

$$\int \sin^a x \cos^b x\,dx = \int z^a(1-z^2)^n\,dz.$$

Cette méthode sera très simple quand n sera positif. Quand n est négatif, elle ne vaut pas mieux que celle que nous allons indiquer.

Différentions le produit $\sin^a x \cos^b x$: nous aurons

$$\begin{aligned} &d(\sin^a x \cos^b x)\\ &\quad = a\sin^{a-1}x \cos^{b+1}x\,dx - b\sin^{a+1}x\cos^{b-1}x\,dx\\ &\quad = a\sin^{a-1}x(1-\sin^2 x)\cos^{b-1}x\,dx - b\sin^{a+1}x\cos^{b-1}x\,dx\\ &\quad = a\sin^{a-1}x\cos^{b-1}x\,dx - (a+b)\sin^{a+1}x\cos^{b-1}x\,dx;\end{aligned}$$

intégrons et posons

$$A_a = \int \sin^a x \cos^b x\,dx,$$

changeons ensuite a en $a+1$, b en $b+1$, nous trouverons

$$\sin^{a+1}x\cos^{b+1}x = (a+1)A_a - (a+b+2)A_{a+2};$$

d'où l'on déduit à volonté A_{a+2} en fonction de A_a ou *vice versa*. On est alors ramené à A_0 ou à A_1, c'est-à-dire à

$$\int \cos^b x \, dx, \quad \text{à} \int \frac{\cos^b x}{\sin x} dx \quad \text{ou} \quad \text{à} \int \cos^b x \sin x \, dx.$$

La dernière intégrale est égale à $-\frac{\cos^{b+1} x}{b+1}$, la seconde s'obtient en abaissant l'exposant de $\cos x$; on est alors ramené à intégrer $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{\cos x}{\sin x}$, ce que l'on sait faire, ou $\frac{1}{\sin x \cos x}$, ce qui donne $\log \operatorname{tang} x$. Si l'on pose

$$B_b = \int \cos^b x \, dx,$$

on aura

$$B_b = \int \cos^{b-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

u

$$B_b = B_{b-2} - \int \cos^{b-2} x \sin^2 x \, dx;$$

en intégrant par parties, on a

$$B_b = B_{b-2} + \frac{\cos^{b-1} x}{b-1} \sin x - \frac{1}{b-1} \int \cos^b x \, dx,$$

$$B_b = B_{b-2} + \frac{\cos^{b-1} x}{b-1} \sin x - \frac{B_b}{b-1},$$

d'où l'on tire B_b en fonction de B_{b-2} ou *vice versa*, et l'on est ramené à l'une des intégrales connues de $\cos x$, de $\frac{1}{\cos x}$ ou de son carré.

On peut encore obtenir une formule de réduction en opérant comme il suit : on a, comme précédemment,

$$d \sin^a x \cos^b x = a \sin^{a-1} x \cos^{b+1} x \, dx - b \sin^{a+1} x \cos^{b-1} x \, dx;$$

en remplaçant alors $\sin^{a+1} x$ par $\sin^{a-1} x (1 - \cos^2 x)$, on obtient une formule analogue à celle de tout à l'heure.

Enfin, si l'on fait usage des formules

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

on transforme le produit $\sin^a x \cos^b x$ en une formule immédiatement intégrable. En effet, on a alors

$$\sin^a x \cos^b x = \frac{1}{2^{a+b}}(-1)^{-\frac{a}{2}}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)^b\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right)^a$$

ou

$$\int \sin^a x \cos^b x\, dx = \int \frac{(-1)^{-\frac{a+1}{2}}}{2^{a+b}}(z^2+1)^b(z^2-1)^a \frac{dz}{z^{a+b+1}},$$

en faisant $e^{x\sqrt{-1}} = z$, $dx = \dfrac{dz}{z\sqrt{-1}}$.

Il n'est peut-être pas hors de propos de faire connaître un développement de $\cos^m x$ et de $\sin^m x$ qui rend ces fonctions facilement intégrables et qui découle naturellement des considérations précédentes; on a

$$\cos^m x = \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)^m$$

ou, par la formule du binôme, en supposant m entier et positif,

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m}\left[e^{mx\sqrt{-1}} + \frac{m}{1}e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2}e^{(m-4)x\sqrt{-1}} + \ldots\right].$$

Groupant les termes également éloignés des extrêmes et observant que $e^{ix\sqrt{-1}} + e^{-ix\sqrt{-1}}$ est égal à $2\cos ix$, on a

$$\cos^m x = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-1)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-2)x + \ldots\right];$$

le dernier terme de cette formule est, dans les crochets,

$$\cos x \frac{m(m-1)\ldots\left(m - \frac{m-1}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{m+1}{2}\right)}$$

si m est impair, et

$$\frac{m(m-1)\ldots\left(m - \frac{m}{2} + 1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}$$

si m est pair.

On trouve de même

$$\sin^{2m} x = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \left[\cos 2mx - \frac{2m}{1} \cos(2m-2)x + \frac{2m(2m-1)}{1.2} \cos(2m-4)x \ldots \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m} : 2 \right]$$

et

$$\sin^{2m+1} x = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \left[\sin(2m+1)x - \frac{2m+1}{1} \sin(2m-1)x + \ldots \pm \frac{(2m+1)(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2.3\ldots m} \sin x \right].$$

On a, par exemple,

$$\cos^3 x = \tfrac{1}{4}(\cos 3x - 3\cos x),$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \tfrac{1}{12} \sin 3x - \tfrac{3}{4} \sin x.$$

XXIII. — Intégration des fonctions contenant des lignes trigonométriques et des exponentielles ou des puissances de la variable.

Les lignes trigonométriques s'exprimant à l'aide des exponentielles, nous n'avons rien à apprendre de nouveau sur l'intégration des fonctions renfermant des exponentielles et des lignes trigonométriques ; nous ferons toutefois connaître la valeur de quelques intégrales, que l'on rencontre dans certaines recherches, à savoir

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

On a

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})x}\, dx = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}(a-b\sqrt{-1})}{a^2+b^2}$$

ou bien, en remplaçant $e^{b\sqrt{-1}x}$ par $\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx$,

$$\int e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)\, dx = e^{ax} \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + e^{ax}\sqrt{-1}\, \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2};$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}.$$

En différentiant ces équations une fois, deux fois, etc., par rapport à b, on aura de nouvelles intégrales qui ne différeront de celles-ci que par l'introduction des facteurs x, x^2, ..., sous le signe $\int$.

Les intégrales précédentes peuvent aussi s'obtenir au moyen de l'intégration par parties; ainsi l'on a

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

d'où l'on déduit les valeurs trouvées plus haut.

Les intégrales

$$\int x^m\cos x\,dx,\quad \int x^m\sin x\,dx$$

s'obtiennent facilement quand m est entier : il suffit pour cela d'intégrer par parties; ainsi l'on a

$$\int x^m\cos x\,dx = x^m\sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx,$$

$$\int x^{m-1}\sin x\,dx = -x^{m-1}\cos x + (m-1)\int x^{m-2}\cos x\,dx,$$

. . . .,

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \text{ou} \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x.$$

On tire de là $\int x^m\cos x\,dx$ par un calcul de proche en proche. $\int x^m\sin x\,dx$ s'obtient de la même façon.

Nous terminerons ces considérations en montrant comment on peut intégrer des expressions telles que

$$\int F(x, \operatorname{arc\,sin} x)\,dx,\quad \int F(x, \operatorname{arc\,tang} x)\,dx,$$

dans lesquelles F désigne un symbole de fonction rationnelle; il suffira, pour être ramené à des intégrales connues, de poser $x = \sin z$ dans le premier cas, et $x = \operatorname{tang} z$ dans le second. L'intégration par parties peut aussi parfois conduire au résultat; ainsi l'on a

$$\int \operatorname{arc\,sin} x \,.\, x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,sin} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et l'on est ramené à une intégrale connue.

XXIV. — Méthodes diverses de quadrature.

L'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *représente en coordonnées rectangulaires l'aire du segment de courbe* $y = f(x)$ *compris entre l'axe des* x *et deux ordonnées* $f(x_0)$ *et* $f(X)$.

Fig. 1.

En effet, soient (*fig.* 1)

$$OB = x_0, \qquad OQ = X, \qquad ON = x,$$

$$ON' = x + dx \qquad \text{et} \qquad NN' = dx.$$

Menons les ordonnées AB, MN, M′N′, PQ. L'aire du rectangle MNN′H construit sur $MN = y$ et sur $NN' = dx$ est $y\,dx$, l'aire du trapèze MNM′N′ diffère de MNHN′ d'une quantité moindre que $dx.\text{M'H}$ ou $dx\,\Delta y$, si l'on suppose que dans l'intervalle compris entre M et M′ l'ordonnée croisse

toujours ou décroisse toujours. On pourra donc représenter l'aire du trapèze en question par

$$f(x+\theta\, dx)\, dx,$$

qui est intermédiaire entre

$$f(x)\, dx \quad \text{et} \quad f(x+dx)\, dx \quad \text{ou} \quad [f(x)+\Delta f(x)]\, dx,$$

et la somme de tous ces trapèzes

$$\sum f(x+\theta\, dx)\, dx$$

a pour limite, par définition, l'intégrale de $f(x)dx$ prise entre les limites x_0 et X.

(Il est bien entendu que nous ne raisonnons que sur des courbes qui n'ont qu'un nombre limité de points singuliers.)

Autrement : à l'accroissement $NN' = dx$ de x correspondent l'accroissement $M'H = \Delta y$ de y et l'accroissement

$$MM'NN' = \Delta u$$

de l'aire ABMN; or Δu diffère de MNN'H, qui est égal à $y\,dx$, d'une quantité moindre que $\Delta y\, dx$, qui est par suite du second ordre; Δu lui-même diffère de la différentielle du de l'aire cherchée d'une quantité du second ordre; on a donc

$$du = y\, dx,$$

aux termes du second ordre près, et, par suite, cette relation est rigoureuse (T. I, p. 130). On en conclut, en intégrant de x_0 à X,

$$U = \int_{x_0}^{X} y\, dx,$$

U désignant l'aire ABQP.

Autrement encore : on a

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{MM'NN'}{dx}.$$

Or MM'NN' est compris entre $y\,dx$ et $(y+\Delta y)\,dx$; donc, en appelant θ un nombre compris entre o et 1,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{y\,dx+\theta\,\Delta y\,dx}{dx}=y+\theta\,\Delta y;$$

en passant aux limites et en faisant $\Delta x=0$, on tire

$$\frac{du}{dx}=y;$$

on en conclut

$$u=\int y\,dx+\text{const.}=\text{F}(x)+\text{const.}$$

Si alors on suppose l'aire nulle pour $x=x_0$, on trouve

$$0=\text{F}(x_0)+\text{const.};$$

en faisant $x=\text{X}$, on a, au contraire,

$$\text{U}=\text{F}(\text{X})+\text{const.};$$

on en déduit, par soustraction,

$$\text{U}=\text{F}(\text{X})-\text{F}(x_0)=\int_{x_0}^{\text{X}}f(x)\,dx.$$

Lorsque les coordonnées sont obliques, en appelant θ l'angle des axes, le rectangle MNM'N' est remplacé par un parallélogramme dont l'aire $y\sin\theta\,dx$ est la différentielle de l'aire cherchée; en désignant par U cette aire, on a donc

$$\text{U}=\int_{x_0}^{\text{X}}y\sin\theta\,dx.$$

Supposons maintenant que l'on se propose d'évaluer l'aire d'un secteur curviligne MON (*fig.* 2), connaissant la relation qui lie le rayon vecteur $\text{OP}=r$ avec l'angle θ, que OP fait avec un axe fixe OX.

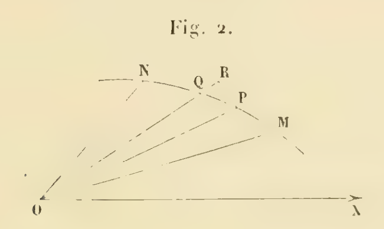
Lorsque le rayon vecteur passe de la position OP à la position voisine OQ, l'aire MOP s'accroît de la quantité POQ ou, aux termes du second ordre près, OPR, PR désignant l'arc de cercle décrit de O comme centre avec OP comme rayon

et compris entre OP et OQ. Le triangle PQR est en effet du second ordre. Nous allons le prouver : on a

$$OP = r, \qquad PR = r\,d\theta, \qquad QR = \Delta r, \qquad PQ < \Delta r + r\,d\theta;$$

le triangle PQR est moindre que l'aire du cercle ayant PQ pour rayon, ou que $\pi(\Delta r + r\,d\theta)^2$, aire qui est bien du second

Fig. 2.



ordre. La différentielle de l'aire du secteur dS pouvant remplacer l'accroissement de cette aire aux termes du second ordre près, on aura

$$dS = OPR = r\,\frac{r\,d\theta}{2} = \tfrac{1}{2}\,r^2\,d\theta;$$

par suite, l'aire S du secteur comprise entre les directions θ_0 et Θ sera

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\Theta} r^2\,d\theta.$$

Il est bon d'observer que l'aire d'un secteur a pour différentielle en coordonnées rectilignes rectangulaires

$$\tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

En effet, on a

$$\left\{\begin{aligned} \theta &= \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}: \end{aligned}\right.$$

ce sont les formules de transformation des coordonnées polaires en coordonnées rectilignes; on en tire

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

d'où l'on conclut, en multipliant par $r^2 = x^2 + y^2$,

$$r^2 d\theta = x\,dy - y\,dx.$$

Or le premier membre de cette formule est égal, d'après ce que l'on vient de voir, à $2\,dS$; il vient donc

$$dS = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

ainsi que nous l'avions annoncé.

XXV. — Diverses expressions de l'aire de l'ellipse.

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si l'on se borne à évaluer l'aire de la portion de l'ellipse située au-dessus de l'axe des x et comprise entre les deux ordonnées correspondant aux abscisses x_0 et X, on aura, pour l'aire en question, l'expression

$$u = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{X} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Or on a

$$\begin{aligned} d.x\sqrt{a^2 - x^2} &= \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx \\ &= \left(2\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx; \end{aligned}$$

multipliant par $\frac{b}{a}$ et intégrant de x_0 à X, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{b}{a}\left(X\sqrt{a^2 - X^2} - x_0\sqrt{a^2 - x_0^2}\right) \\ &\quad = \frac{2b}{a}\int_{x_0}^{X} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx - ab\left(\arcsin\frac{X}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right). \end{aligned}$$

L'intégrale qui figure dans cette formule est égale à $2u$; on a donc

$$u = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(X\sqrt{a^2 - X^2} - x_0\sqrt{a^2 - x_0^2}\right) + \frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{X}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right).$$

Si l'on fait $x_0 = 0$, $X = a$, on aura l'aire du quart d'ellipse

$$u = \frac{ab}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4},$$

et l'aire totale de l'ellipse est égale à πab.

L'équation polaire de l'ellipse rapportée à son foyer est

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}, \qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \frac{c}{a};$$

l'aire d'un secteur sera

(1) $$u = \frac{p^2}{2}\int_{\theta_0}^{\Theta} \frac{d\theta}{(1 - e\cos\theta)^2}.$$

Bien que l'on puisse effectuer cette intégration sans faire de changement de variable, nous substituerons à l'angle θ l'anomalie excentrique φ. Le rayon vecteur r est donné par la formule

(2) $$r = \frac{a^2 - cx}{a},$$

x désignant l'abscisse comptée à partir du centre ou $a\cos\varphi$; on a donc

(3) $$r = a(1 - e\cos\varphi);$$

d'ailleurs l'ordonnée s'exprime au moyen des formules $b\sin\varphi$ ou $r\sin\theta$, ainsi

$$b\sin\varphi = r\sin\theta;$$

d'où l'on conclut

(4) $$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{b}{r}\sin\varphi = \dfrac{b\sin\varphi}{a(1 - e\cos\varphi)}, \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{r}{b}\sin\theta = \dfrac{b\sin\theta}{a(1 - e\cos\theta)}. \end{cases}$$

De (4) on tire

$$d\theta = \frac{b\,d\varphi}{a(1 - e\cos\varphi)}$$

et par suite, en vertu de (3),

$$\frac{r^2 d\theta}{2} = \tfrac{1}{2}\, ab(1 - e\cos\varphi)\, d\varphi;$$

l'aire du secteur devient alors

$$u = \frac{ab}{2}\int(1 - e\cos\varphi)\, d\varphi$$

ou

$$u = \frac{ab}{2}(\varphi - e\sin\varphi),$$

à une constante près. Si l'on désigne par φ_0 et Φ la valeur de φ pour $\theta = \theta_0$ et $\theta = \Theta$, on aura

$$u = \frac{ab}{2}[\Phi - \varphi_0 - e(\sin\Phi - \sin\varphi_0)].$$

XXVI. — Aires de l'hyperbole et de la parabole.

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation

$$y = \frac{k^2}{x};$$

on en conclut que l'aire du segment d'hyperbole compris entre une de ses asymptotes et deux parallèles à l'autre est

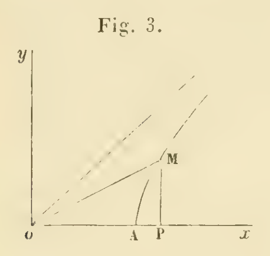
$$\int_{x_0}^{x} \frac{k^2\, dx}{x} \sin\theta = k^2 \sin\theta \log\frac{x}{x_0},$$

θ désignant l'angle des asymptotes, et x_0, x les abscisses des parallèles qui terminent le trapèze curviligne dont on vient d'évaluer l'aire.

L'aire de l'hyperbole équilatère comprise entre une asymptote, une perpendiculaire à cette asymptote menée par le sommet et une autre perpendiculaire menée à la distance x du centre, est précisément le logarithme népérien de x, quand on prend pour équation de l'hyperbole $xy = 1$.

Évaluons encore l'aire d'un secteur hyperbolique OMA

Fig. 3.



(*fig.* 3) compris entre le grand axe et un rayon vecteur issu de l'origine. Soient

$$x = a\,\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \qquad y = b\,\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

les équations de l'hyperbole; la différentielle dS du secteur est donnée par la formule (p. 70)

$$dS = \frac{1}{2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{d\varphi}\,d\varphi$$

ou bien

$$dS = \frac{ab}{2}\left[\left(\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\right)^2\right]d\varphi = \frac{ab}{2}\,d\varphi;$$

on en conclut, en intégrant de manière que l'aire soit comptée à partir de OA et, par suite, de manière à s'annuler pour $\varphi = 0$,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} ab\,d\varphi = \frac{ab}{2}\,\varphi.$$

Le secteur S est donc proportionnel à l'angle $\frac{\varphi}{2}$; dans l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$, il lui est égal. Le sinus et le cosinus hyperboliques de φ sont donc les coordonnées d'un point de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$, correspondant au secteur d'aire $\frac{\varphi}{2}$, absolument comme le sinus et le cosinus ordinaires de φ sont les coordonnées d'un point du cercle $x^2 + y^2 = 1$ correspondant au secteur circulaire d'aire $\frac{\varphi}{2}$.

Enfin l'aire d'un segment hyperbolique, tel que AMP, est donnée par la formule

$$u = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

On pose

$$(1) \qquad u = \frac{b}{a}\int_a^x \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx;$$

or on a

$$d.x\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x^2 - a^2}\, dx + \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{2x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - d a^2 \log(x + \sqrt{x^2 - a^2});$$

on en conclut

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\log(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

La formule (1) donne alors

$$u = \frac{b}{a}\left(\tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$

ou encore

$$u = \tfrac{1}{2} xy - \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Rien n'est plus facile que d'évaluer l'aire d'un segment de parabole compris entre une tangente et une parallèle à cette tangente; en effet, la parabole rapportée à une tangente et au diamètre du point de contact a pour équation

$$y = \frac{x^2}{2p};$$

on en conclut, pour l'aire comprise entre le point de contact, l'axe des x et l'ordonnée y,

$$\int_0^x \sin\theta\, \frac{x^2}{2p}\, dx = \frac{x^3}{6p}\sin\theta = \frac{xy}{3}\sin\theta;$$

on en déduit aisément que l'aire du segment est les deux tiers du parallélogramme circonscrit.

XXVII. — Exemples divers.

Lorsqu'une courbe est telle que ses coordonnées sont fonctions rationnelles d'un même paramètre, on peut en tirer parti pour évaluer son aire. Considérons, par exemple, le folium de Descartes

$$x^3+y^3-3axy=0;$$

en posant

$$y=tx,$$

on trouve

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3},$$

$$dx=3a\,dt\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \qquad y\,dx=\frac{9a^2t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt;$$

on a de même

$$x\,dy=9a^2t^2\,\frac{2-t^3}{(1+t^3)^3}\,dt.$$

Il en résulte, pour l'aire du secteur,

$$dS=\frac{1}{2}\,9a^2t^2\,\frac{1}{(1+t^3)^2}\,dt$$

ou bien, en posant $t^3=u$,

$$dS=\frac{3a^2}{2}\,\frac{du}{(1+u)^2};$$

on en conclut

$$S=-\frac{1}{2}\,\frac{3a^2}{1+u}+\text{const.}$$

Si l'on fait $u=0$, on aura $S=0$ si l'on compte le secteur à partir de l'axe des x, et alors la constante se réduit à $\frac{3a^2}{2}$; on a donc

$$S=\frac{3a^2}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{3a^2}{1+u}.$$

Si l'on fait $t=\infty$ ou $u=\infty$, on a l'aire de la demi-boucle

du folium $S = \frac{3a^2}{2}$; l'aire de la boucle entière est donc $3a^2$.

La *cycloïde* a pour équations

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u);$$

on en conclut

$$y\,dx = a^2(1 - \cos u)^2 du$$

ou

$$y\,dx = a^2(1 - 2\cos u + \cos^2 u)\,du$$

ou

$$y\,dx = a^2(1 - 2\cos u + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2u)\,du;$$

d'où

$$\int_0^x y\,dx = a^2\left(u - 2\sin u + \frac{u}{2} + \tfrac{1}{4}\sin 2u\right)$$

ou, si l'on veut,

$$\int_0^x y\,dx = a^2(\tfrac{3}{2}u - 2\sin u + \tfrac{1}{4}\sin 2u).$$

Si l'on fait $x = 2\pi a$ ou $u = 2\pi$, on a l'aire totale $3\pi a^2$.

La *développée de l'ellipse* a pour équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}};$$

on peut remplacer cette équation par les deux suivantes

$$x = \frac{c^2}{a}\sin^3\varphi, \qquad y = \frac{c^2}{b}\cos^3\varphi,$$

et l'on a alors pour l'aire de la courbe

$$\int y\,dx = \int \frac{3c^4}{ab}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

L'aire totale s'obtiendra en faisant varier φ de 0 à 2π; ainsi elle sera donnée par la formule

$$\frac{3c^4}{ab}\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

Si l'on met cette intégrale sous la forme

$$\frac{3c^4}{ab}\int_0^{2\pi}(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\,d\varphi$$

et si l'on remplace $\cos^4\varphi$ et $\cos^6\varphi$ par leurs développements,

$$\cos^4\varphi = \tfrac{1}{8}[\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi] + \tfrac{3}{8},$$
$$\cos^6\varphi = \tfrac{1}{32}[\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi] + \tfrac{5}{16},$$

on trouve pour l'aire cherchée l'expression

$$\frac{3\pi}{8}\frac{c^4}{ab}.$$

Conchoïdes. — Soient $r = f(\theta)$ une courbe, $r = a + f(\theta)$ sa conchoïde; on a, pour l'aire d'un secteur S de conchoïde,

$$2S = \int_{\theta_0}^{\Theta}[a^2 + 2af(\theta) + f^2(\theta)]\,d\theta,$$
$$2S = (\Theta - \theta_0)a^2 + 2a\int f(\theta)\,d\theta + \int f^2(\theta)\,d\theta.$$

Or $\frac{1}{2}\int f^2(\theta)\,d\theta$ est l'aire du secteur de courbe; en l'appelant Σ, on a, pour le double de la portion d'aire comprise entre la courbe et sa conchoïde,

$$2S - 2\Sigma = a^2(\Theta - \theta_0) + 2a\int_{\theta_0}^{\Theta} f(\theta)\,d\theta;$$

pour le cercle, on a

$$r = 2R\cos\theta,$$

donc

$$2S - 2\Sigma = a^2(\Theta - \theta_0) - 4aR(\sin\Theta - \sin\theta_0);$$

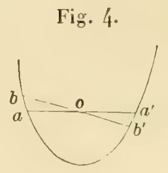
pour $\theta_0 = 0$ et $\Theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$2S - 2\Sigma = \frac{\pi}{2}a^2 - 4aR.$$

Théorème de Dupin. — *Si aa' est une sécante détachant dans une courbe un segment d'aire constante, cette droite enveloppera une courbe qui la touchera en son milieu.*

En effet, l'aire boa (*fig.* 4) est égale à l'aire $b'oa'$, en supposant que bb' soit une position de la sécante voisine de aa';

Fig. 4.

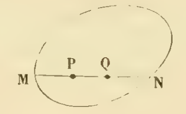


donc $bo.ao \sin o = b'o.a'o \sin o$, donc $bo.ao = b'o.a'o$ ou $\overline{ao}^2 = \overline{a'o}^2$, donc enfin $oa = oa'$. C. Q. F. D.

Théorème de Holditch. — Nous démontrerons encore le théorème suivant de M. Holditch :

Menons dans une courbe fermée C (*fig.* 5) *une corde de longueur constante* $MN = l + l'$; *le point* P *qui partage*

Fig. 5.



cette corde en deux parties $MP = l$, $PN = l'$ *décrit une certaine courbe* C'; *l'aire comprise entre* C *et* C' *est égale à* $\pi ll'$.

Soient S l'aire de la courbe donnée, σ l'aire de la courbe lieu des points P, et σ' l'aire de la courbe enveloppe de MN et lieu des points Q où MN touche son enveloppe; soit $NQ = r$: on a

$$S - \sigma' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta,$$

θ désignant l'angle que MN fait avec sa position infiniment voisine. On a aussi d'ailleurs

$$S - \sigma' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (l + l' - r)^2\, d\theta;$$

en égalant ces deux valeurs, on tire

$$\int_0^{2\pi} r\,d\theta = \pi(l + l');$$

d'un autre côté, on a

$$\sigma - \sigma' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (l - r)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (l^2 - 2lr + r^2)\,d\theta,$$

d'où

$$S - \sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (l^2 - 2lr)\,d\theta = -\pi l^2 + \pi l(l + l') = \pi l l',$$

ainsi que nous l'avions annoncé.

XXVIII. — Longueur de quelques arcs.

On ne peut pas exprimer, en général, sous forme algébrique, l'arc d'une courbe du second degré ; on ne peut pas non plus l'exprimer à l'aide des fonctions logarithmiques ou circulaires. Toutefois la parabole fait exception à la règle. Si l'on pose

$$y = \frac{x^2}{2p},$$

il vient, en appelant s l'arc compté à partir du sommet,

$$dy = \frac{x\,dx}{p}, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}$$

ou

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx.$$

Or on a

$$d.x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} = \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} + \frac{x^2}{p^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}}\right)dx$$

$$= \frac{1 + \frac{2x^2}{p^2}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}}\,dx = \left(\frac{2 + \frac{2x^2}{p^2}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}}\right)dx$$

$$= 2\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx - p\,d\log\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\right);$$

on en conclut, en intégrant,

$$x\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} = 2s - p\log\left(\frac{x}{p}+\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\right) + C.$$

Si l'on fait $x=0$, on a $s=0$ et la constante est nulle; on a donc

$$s = \frac{1}{2}x\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + \frac{p}{2}\log\left(\frac{x}{p}+\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\right).$$

Arc de cycloïde. — Des équations de la cycloïde

$$x = a(u - \sin u),$$
$$y = a(1 - \cos u),$$

on tire

$$dx = a(1-\cos u)\,du, \qquad dy = a\sin u\,du,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(2 - 2\cos u)\,du^2 = 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}u\,du^2;$$

on en conclut

$$ds = 2a\sin\tfrac{1}{2}u\,du$$

et, au signe près,

$$s = 4a\cos\tfrac{1}{2}u + c.$$

Commençons à compter l'arc à partir du point le plus haut de la courbe, alors $u=\pi$ et $s=0$; donc

$$0 = 4a\cos\frac{\pi}{2} + c;$$

par suite $c=0$, et

$$s = 4a\cos\tfrac{1}{2}u.$$

Cette longueur s est égale au double de la portion de tangente menée par l'extrémité de l'arc et terminée à la tangente menée par le point le plus élevé de la cycloïde, ainsi que l'on s'en assure en faisant la figure, et en observant que la corde du cercle générateur tangente à la cycloïde est précisément

$$2a\cos\tfrac{1}{2}u.$$

y est égal à $a(1-\cos u)$ ou à $2a\sin^2\frac{1}{2}u$. Si l'on prend alors

pour axe des x la tangente multiple de la cycloïde, on aura

$$y = a(1 + \cos u)$$

ou

$$y = 2a \cos^2 \frac{u}{2},$$

d'où l'on conclura

$$y = \frac{s^2}{8a}.$$

Ainsi, l'on peut dire que, dans la cycloïde, l'ordonnée est proportionnelle au carré de l'arc.

Arc de chaînette. — La chaînette est une courbe dont l'arc peut s'obtenir avec assez de facilité ; son équation est

$$my = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2};$$

on trouve

$$dy = \frac{dx}{2}(e^{mx} - e^{-mx});$$

on a donc

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{4}(e^{2mx} + e^{-2mx} + 2)$$

ou

$$ds^2 = \frac{dx^2}{4}(e^{mx} + e^{-mx})^2$$

ou

$$ds = \tfrac{1}{2}\, dx(e^{mx} + e^{-mx})$$

et, par suite,

$$s = \frac{1}{2m}(e^{mx} - e^{-mx}),$$

sans ajouter de constante si l'on compte les arcs à partir du point le plus bas de la courbe.

On a

$$s^2 = \frac{1}{4m^2}(e^{2mx} + e^{-2mx} - 2),$$

$$y^2 = \frac{1}{4m^2}(e^{2mx} + e^{-2mx} + 2);$$

on en conclut

$$s^2 + y^2 = \frac{1}{2m^2}(e^{2mx} + e^{-2mx}),$$

$$y^2 - s^2 = \frac{1}{m^2}.$$

Il en résulte que l'ordonnée est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'arc serait un côté et dont l'autre côté serait constant et égal à l'ordonnée minima de la courbe.

XXIX. — Quelques aires et quelques arcs en coordonnées polaires.

Spirale logarithmique. — Son équation est

$$r = ae^{m\theta};$$

on a

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int a^2 e^{2m\theta} d\theta = \frac{a^2}{4m} e^{2m\theta} + \text{const.}$$

et, par suite, l'aire du secteur est donnée par la formule $\frac{r^2}{4m} + \text{const.}$

L'arc est donné par la formule

$$ds^2 = (m^2 a^2 e^{2m\theta} + a^2 e^{2m\theta}) d\theta^2 = a^2 e^{2m\theta}(1 + m^2) d\theta^2$$

ou

$$ds = a\sqrt{1 + m^2}\, e^{m\theta} d\theta,$$

$$s = a\frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} e^{m\theta} + \text{const.};$$

il peut donc se mettre sous la forme

$$s = \sqrt{\frac{1 + m^2}{m^2}}\, r + \text{const.};$$

l'arc compté à partir du pôle est fini et égal à $\sqrt{\frac{1 + m^2}{m^2}}\, r$.

Lemniscate. — La lemniscate a pour équation

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta};$$

donc

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta + \text{const.}$$

Si l'on veut l'aire d'une boucle, il faudra intégrer de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$, et alors on aura $\frac{a^2}{4}\,2$ ou $\frac{a^2}{2}$.

L'arc de lemniscate ne peut pas s'obtenir en termes finis, en d'autres termes, ne peut pas s'exprimer au moyen des signes ordinaires de l'Algèbre, y compris les signes log, sin, cos, etc., employés en nombre fini.

Limaçon de Pascal. — Il a pour équation.

$$r = a(1 - \cos\theta) = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\theta;$$

c'est par conséquent un cas particulier de la conchoïde du cercle $r = -a\cos\theta$. Son arc et son aire s'expriment facilement sous forme finie; d'abord l'aire est égale à

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta.$$

Si nous voulons, par exemple, l'aire totale, nous intégrerons de o à π et nous doublerons le résultat; nous aurons ainsi $\frac{3}{2}\pi a^2$, ce qui est presque évident par des considérations géométriques.

L'arc ds est donné par la formule.

$$ds^2 = 2a^2(1 - \cos\theta)\,d\theta^2 = 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta^2,$$

d'où

$$ds = 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta;$$

on en conclut, en intégrant de o à θ, et en comptant les arcs à partir de l'axe polaire,

$$s = -4a\cos\tfrac{1}{2}\theta + 4a,$$

formule qui permet de construire très simplement l'arc du limaçon.

XXX. — Sur quelques courbes dont l'arc peut s'obtenir en termes finis.

Dans les œuvres posthumes d'Euler, on a trouvé les équations de toute une série de courbes dont l'arc peut s'exprimer

sous forme finie. Depuis, A. Serret a fait connaître toutes les courbes algébriques dont l'arc peut s'obtenir en termes finis (t. XXXV du *Journal de l'École Polytechnique*).

Voici les formules données par Euler

$$x = \psi''(\theta)\cos\theta + \psi'(\theta)\sin\theta,$$
$$y = \psi''(\theta)\sin\theta - \psi'(\theta)\cos\theta;$$

on en tire

$$dx' = \psi'''(\theta)\cos\theta + \psi'(\theta)\cos\theta,$$
$$dy' = \psi'''(\theta)\sin\theta + \psi'(\theta)\sin\theta,$$

c'est-à-dire

$$dx'^2 + dy'^2 = [\psi'''(\theta) + \psi'(\theta)]^2;$$

donc, en appelant s l'arc de courbe,

$$ds' = \psi'''(\theta) + \psi'(\theta)$$

et, par suite,

$$s = \psi''(\theta) + \psi(\theta) + \text{const.}$$

On peut, par exemple, prendre

$$x = -m^2 \sin m\theta \cos\theta + m \cos m\theta \sin\theta,$$
$$y = -m^2 \sin m\theta \sin\theta - m \cos m\theta \cos\theta,$$

et l'on aura une courbe algébrique, si m est entier.

EXERCICES ET NOTES.

1. Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fonction rationnelle, la formule (3) de la page 9 donne, en l'intégrant,

$$\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)} = \sum \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} [\theta(a)\log(x-a)]$$
$$+ \sum \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{dp^{\alpha-1}} \left[\varphi(p,q)\log\left(\overline{x-p}^2 + q^2\right)\right]$$
$$- \sum \frac{2}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{dp^{\alpha-1}} \left[\psi(p,q)\operatorname{arc\,tang}\frac{x-p}{q}\right].$$

2. Posons

$$X_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \int \frac{x^m\,dx}{R};$$

on a

$$X_m = \frac{x^{m-1}\sqrt{ax^2+2bx+c}}{ma} - \frac{(2m-1)b}{ma} X_{m-1} - \frac{c(m-1)}{ma} X_{m-2},$$

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}} + R\right) \qquad \text{si } a > 0,$$

$$X_0 = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-ax-b}{\sqrt{b^2-ac}} \qquad \text{si } a < 0,$$

$$X_1 = \frac{R}{a} - \frac{b}{a} X_0,$$

$$X_{-1} = -X_0\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. Si l'on pose

$$X_{m,p} = \int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

on aura

$$a(m-n+1)X_{m-n,p} + (m+np+1)bX_{m,p} = x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1};$$

on aura aussi

$$(m+pn+1)X_{m,p} - apnX_{m,p-1} = x^{m+1}(a+bx^n)^p.$$

4. Si l'on pose

$$\int \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^p} = X_p,$$

on a

$$\frac{ax+b}{a(ax^2+2bx+c)^p} + (2p-1)X_p + \frac{2p}{a}(b^2-ac)X_{p+1} = 0,$$

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \qquad \text{si } b^2-ac < 0,$$

$$X_1 = \frac{1}{2a\sqrt{b^2-ac}} \log \frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} \qquad \text{si } b^2-ac > 0.$$

5. On trouve : 1° en supposant n pair,

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\sin x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}\,x,$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}\,x,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \ldots \pm \operatorname{tang} x \mp x,$$

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \ldots \pm \cot x \mp x,$$

$$\int \operatorname{séc}^n x\,dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{séc}^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{séc} x\right],$$

$$\int \operatorname{coséc}^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{coséc}^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-2)}{1.3\ldots(n-3)}\operatorname{coséc} x\right];$$

2° En supposant n impair,

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right],$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right],$$

$$\int \operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \ldots \pm \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} \pm \log\cos x.$$

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} + \ldots \mp \frac{\cot^2 x}{2} \mp \log\sin x,$$

$$\int \text{séc}^n x\,dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\text{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\,\text{séc}^{n-2}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\,\text{séc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\log\text{tang}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int \text{coséc}^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\text{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\,\text{coséc}^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\,\text{coséc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\log\text{tang}\frac{x}{2}.$$

On peut calculer l'intégrale de $\cos^n x$ et de $\sin^n x$ en remplaçant ces quantités par leurs développements en suite de sinus ou de cosinus d'arcs en progression arithmétique; en égalant alors les résultats trouvés ainsi aux précédents, puis en faisant $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient des identités. Pour que cette méthode réussisse, il faut, bien entendu, que les constantes arbitraires soient égales de part et d'autre.

6. Trouver la limite pour $n = \infty$ de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{pn};$$

prouver qu'elle est égale à $\int_0^{p-1} \frac{dx}{1+x} = \log p$.

7. Trouver la limite pour $n = \infty$ de

$$\frac{1}{pn} + \frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + \ldots + \frac{1}{qn}.$$

8. Soit

$$\varphi_i(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+i-1)}{1.2.3\ldots i},$$

trouver pour $n = \infty$ la limite de

$$\frac{1}{n^{i+1}}[\varphi_i(n) + \varphi_i(n+1) + \ldots + \varphi_i(pn)].$$

9. Par un point du plan d'un cercle ou même des rayons vecteurs aboutissant aux sommets d'un polygone régulier inscrit, on demande d'évaluer la moyenne des carrés des droites ainsi menées lorsque le nombre des côtés du polygone augmente indéfiniment.

10. Discuter les courbes ayant pour équations

$$y = \int_0^x \frac{e^x - e^{-x}}{x}\,dx,$$

$$y = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

11. Trouver l'aire d'un segment de chaînette limité par la courbe et par une droite perpendiculaire à son axe. La chaînette a pour équation

$$y = \frac{1}{2m}(e^{mx} + e^{-mx}).$$

12. Trouver l'aire comprise entre la chaînette

$$y = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2m},$$

sa développante (tractrice) et une tangente quelconque à la chaînette. La développante sera choisie de manière à être symétrique par rapport à l'axe des y, en d'autres termes on suppose qu'elle rencontre la courbe au point $x = 0$, $y = \frac{1}{m}$.

13. Trouver l'aire totale comprise entre la tractrice et l'axe des x (*voir* l'exemple précédent).

14. Trouver l'aire d'un segment de cissoïde

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0.$$

15. Trouver l'aire d'un segment de strophoïde

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$$

et, en particulier, trouver l'aire de la boucle de cette courbe.

16. Évaluer l'aire comprise entre un arc d'épicycloïde quelconque et le cercle de base.

17. Trouver des épicycloïdes dont l'arc puisse se calculer au moyen des fonctions algébriques, logarithmiques et trigonométriques.

18. Trouver la longueur de l'arc de la courbe $y^2 = mx^3$ en fonction des coordonnées de ses extrémités.

19. Trouver l'aire comprise entre l'hyperbole, sa développée et deux de ses normales en fonction des distances des pieds de ces normales aux asymptotes.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — Calcul direct de quelques intégrales définies.

Pour calculer la valeur d'une intégrale définie, il semble qu'il n'y ait qu'à appliquer la formule (p. 24)

$$\int_{x_0}^{X} f'(x)\,dx = f(X) - f(x_0), \tag{1}$$

comme nous l'avons toujours fait jusqu'ici. Mais, outre que cette formule (dans des cas rares, il est vrai) est parfois inexacte, pour que l'on puisse l'employer avec succès, il est nécessaire de connaître la fonction $f(x)$, c'est-à-dire l'intégrale indéfinie de $f'(x)\,dx$.

L'objet de ce Chapitre est surtout d'indiquer des méthodes permettant de calculer la valeur d'une intégrale définie, dans le cas où l'on ne pourrait pas calculer l'intégrale indéfinie correspondante.

Nous commencerons toutefois par faire quelques applications de la formule (1). On a

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

donc

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}.$$

On a

$$\int \cos x\,dx = \sin x, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x,$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1,$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0, \qquad \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2, \qquad \ldots;$$

on a

$$\int \frac{dx}{x} = \log x, \qquad \text{donc} \qquad \int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a}.$$

Voici quelques intégrales dont la valeur doit être connue : on trouve, quand $m \gtrless n$,

$$(1) \qquad \cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\cos(m+n)x + \tfrac{1}{2}\cos(m-n)x;$$

en intégrant de α à $\alpha + 2\pi$,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx &= \frac{1}{2}\,\frac{\sin(m+n)(\alpha+2\pi) - \sin(m+n)\alpha}{m+n} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(m-n)(\alpha+2\pi) - \sin(m-n)\alpha}{m-n} \\ &= \frac{\cos(m+n)(\alpha+\pi)\sin(m+n)\pi}{m+n} \\ &\quad + \frac{\cos(m-n)(\alpha+\pi)\sin(m-n)\pi}{m-n};\end{aligned}$$

quand m et n sont entiers, ce qui est le cas ordinaire des applications, on a

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0;$$

de même,

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0.$$

Quand $m = n$, la formule (1) a encore lieu ; mais $\cos(m-n)x$

est égal à l'unité et alors on trouve

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sin mx \cos mx\, dx = 0.$$

Ces formules permettent d'établir un théorème important.

Si l'on a, quel que soit x, l'égalité

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} a'_0 + a'_1 \cos x + a'_2 \cos 2x + \ldots \\ + b'_1 \sin x + b'_2 \sin 2x + \ldots, \end{aligned}\right.$$

on aura nécessairement $a_0 = a'_0, \ldots, a_i = a'_i, \ldots, b_i = b'_i$, *le nombre des termes de chaque membre étant supposé limité.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de multiplier les deux membres de la formule précédente par $\cos mx\, dx$ et d'intégrer entre les limites 0 et 2π; on a alors

$$\pi a_m = \pi a'_m \qquad \text{ou} \qquad a_m = a'_m.$$

On verrait de même que $b_m = b'_m$.

Voici une autre application des mêmes formules; on a, en supposant m entier,

$$\cos^m x = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots\right];$$

on en conclut

$$\int_0^{2\pi} \cos^m x \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2^{m-1}},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^m x \cos(m-2)x\, dx = \frac{m\pi}{2^{m-1}},$$

. . . .

II. — Des intégrales définies singulières de Cauchy.

On appelle *intégrale définie singulière,* d'après Cauchy, une intégrale de la forme

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

dans laquelle ε et ε' sont infiniment petits, mais de mêmes signes, et dans laquelle a est une valeur de x qui rend $f(x)$ infini; on suppose d'ailleurs $f(x)$ fini entre $a - \varepsilon$ et $a - \varepsilon'$.

La considération de ces intégrales est très utile, comme on le verra tout à l'heure, et il importe de donner des règles, sinon pour les calculer, au moins pour décider si elles sont finies ou infiniment petites. Ces règles reposent sur le théorème suivant, qui est d'un fréquent usage :

Théorème. — *Soit* G *une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre* $f(x)$ *quand* x *varie de* x_0 *à* X; *on a, en supposant la fonction* $\varphi(x)$ *toujours positive ou toujours négative entre les limites en question,*

$$(1)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx = G\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx,$$

et si $f(x)$ *est continu entre les limites* X *et* x,

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)\,dx = f\left(x_0 + \theta\overline{X - x_0}\right)\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx,$$

θ *désignant un nombre compris entre* o *et* 1.

Soient, en effet, M le maximum, m le minimum de $f(x)$ entre X et x_0, il est clair que $\int_{x_0}^{X} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ sera compris entre les expressions

$$\int_{x_0}^{X} m\,\varphi(x)\,dx = m\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$$

et

$$\int_{x_0}^{X} M\varphi(x)\,dx = M\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx;$$

or $G\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx$ est précisément l'expression des quantités comprises entre les deux précédentes.

Il est clair que, si $f(x)$ est continu, il passera par la valeur G entre x_0 et X, et que, par suite, G est de la forme $f(x_0+\theta\overline{X-x})$, θ étant compris entre o et 1, ce qui démontre la formule (2).

Il est difficile de donner des règles absolues pour le calcul des intégrales singulières, mais le théorème précédent sera souvent d'un grand secours.

Par exemple, nous voulons savoir si l'intégrale singulière suivante est nulle

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\cos x}{\sin\sqrt{x}}\,dx;$$

on la mettra sous la forme

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

ou, en appelant ξ une valeur de x comprise entre ε et ε',

$$\frac{\sqrt{\xi}\cos\xi}{\sin\sqrt{\xi}}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,\frac{\sqrt{\xi}\cos\xi}{\sin\sqrt{\xi}}\left(\sqrt{\varepsilon'}-\sqrt{\varepsilon}\right);$$

le facteur hors de la parenthèse est fini et égal à 2 pour $\xi=0$, le second a pour limite o : notre intégrale singulière est donc nulle.

Théorème I. — *Soient α un exposant plus petit que un, $\varphi(x)$ une fonction de x qui reste inférieure à une quantité fixe pour des valeurs de x voisines de a; l'intégrale singulière*

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx$$

est nulle quand on suppose ε *et* ε' *infiniment petits et de même signe.*

On raisonnera en supposant ε et ε' positifs; alors, appelant M la plus grande valeur de $\varphi(x)$ quand x varie de a à $a+\varepsilon'$, on aura

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx < M \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

ou

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx < \frac{M}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right).$$

Quand ε et ε' tendent vers zéro, le second membre de cette formule tend vers zéro, et par suite notre intégrale singulière elle-même tend vers zéro. C. Q. F. D.

Théorème II. — *Soient* α *un exposant plus grand que un ou égal à un,* $\varphi(x)$ *une fonction de* x *qui reste supérieure en valeur absolue à une quantité fixe et qui ne change pas de signes pour les valeurs de* x *voisines de* a: *l'intégrale singulière*

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx$$

peut être rendue aussi grande que l'on veut, en choisissant convenablement ε *et* ε'.

Nous raisonnerons dans l'hypothèse où ε et ε' sont positifs, et où $\varphi(x)$ est positif. Appelons m la plus petite valeur de $\varphi(\varepsilon)$ quand x varie entre a et $a+\varepsilon'$; on aura

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx > m \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^\alpha};$$

si $\alpha = 1$, il viendra

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^\alpha} > m \log\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

qui sera aussi grand que l'on voudra quand ε' sera suffisam-

ment petit; *a fortiori*, notre intégrale singulière pourra-t-elle être rendue aussi grande que l'on voudra si $\alpha > 1$.

Par exemple, l'intégrale singulière

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{x}}$$

est nulle; au contraire,

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x\,dx}{x}, \quad \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x\,dx}{x^2}, \quad \int_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon'} \frac{x}{1-x}\,dx$$

peuvent être prises aussi grandes que l'on veut en valeur absolue.

Parfois la valeur d'une intégrale singulière peut être calculée en la comparant à une autre dont la valeur est connue; ainsi l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} [\log(x-a)]^m\,dx$$

est moindre que

$$(2) \qquad \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{x-a}},$$

quelque grand que soit m, parce que, quand $x-a$ est assez petit,

$$[\log(x-a)]^m < \frac{1}{\sqrt{x-a}} \qquad \text{ou} \qquad [\log(x-a)]^{2m} < \frac{1}{x-a};$$

cela résulte de ce que $u^{2m} < e^u$, quand u est très grand et positif (*voir* t. I, p. 376)

$$\lim \frac{u^{2m}}{e^u} = 0;$$

l'intégrale (2) étant nulle, (1) qui a ses éléments plus petits est nulle *a fortiori*.

L'intégrale singulière

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} [\log(x-a)]^m \sin(x-a)\,dx$$

est nulle, parce qu'elle a ses éléments respectivement plus

petits que les éléments de celle que nous venons de calculer;

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} [\log(x-a)]^m e^x \, dx$$

est nulle, parce qu'elle est moindre que

$$e^{a+\varepsilon'} \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} [\log(x-a)]^m \, dx, \quad \dots$$

III. — Étude du cas où la fonction placée sous le signe d'intégration devient infinie.

Si la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x = a_1, a_2, \dots, a_k$ compris entre x_0 et X, on appelle intégrale de $f(x)$ prise entre les limites x_0 et X, et l'on désigne encore par la notation

$$\int_{x_0}^{X} f(x) \, dx,$$

la limite vers laquelle tend l'expression

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^{a_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{a_1+\eta_1}^{a_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx \\ &\quad + \int_{a_2+\eta_2}^{a_3-\varepsilon_3} f(x)\,dx + \dots + \int_{a_k+\eta_k}^{X} f(x)\,dx, \end{aligned} \right.$$

quand les nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \eta_1, \eta_2, \dots$ tendent vers zéro, quelle que soit la manière dont ces quantités tendent vers zéro. L'expression (1) n'a généralement pas de limite, mais il y a des cas nombreux où cette limite existe et reste la même, quelle que soit la manière dont les ε et les η tendent vers zéro.

Pour décider si une intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *a une valeur bien déterminée, on forme les intégrales singulières telles que*

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx, \quad \int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\,dx,$$

a désignant une valeur qui rend $f(x)$ infini entre les limites x_0 et X, et si toutes ces intégrales singulières sont nulles, l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ est bien déterminée.

Pour démontrer ce théorème, que nous devons à Cauchy, il suffit de prouver que, si l'intégrale singulière $\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx$ est nulle, l'intégrale

$$\int_{p}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx, \tag{2}$$

p désignant un nombre tel qu'entre p et a, $f(x)$ ne devienne pas infini, a une valeur bien déterminée. En effet, la somme (1), qui sert à définir $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, peut se décomposer en intégrales de la forme précédente (2). Or on a

$$\int_{p}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx = \int_{p}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx.$$

Si l'intégrale singulière qui figure dans cette formule a pour limite zéro, de quelque manière que ε et ε' tendent vers zéro, on pourra toujours prendre ε et ε' assez petits pour qu'elle reste toujours moindre que $\frac{E}{2}$ en valeur absolue, en sorte que, si, pour abréger, nous représentons $\int_{p}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx$ par $\varphi(\varepsilon)$, la formule précédente pourra s'écrire

$$\varphi(\varepsilon') = \varphi(\varepsilon) + \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

et l'on voit que $\varphi(\varepsilon')$ pourra être compris entre des limites $\varphi(\varepsilon) + \frac{E}{2}$ et $\varphi(\varepsilon) - \frac{E}{2}$; ou, si l'on veut, en appelant A et B deux nombres fixes dont la différence soit E, on peut dire que $\varphi(\varepsilon')$ reste compris entre A et B pour des valeurs suffisamment petites de ε'. Mais on pourra de même faire en sorte

que $\varphi(\varepsilon')$ reste compris entre deux autres nombres A', B' dont la différence B' — A' soit moindre que $E' < \frac{E}{2}$; mais, comme $\varphi(\varepsilon')$ doit rester compris entre A et B, on peut supposer A' et B' compris entre A et B; on verrait aussi que $\varphi(\varepsilon')$ peut être compris entre deux autres nombres fixes A'' et B'' dont la différence soit moindre que $E'' < \frac{E'}{2}$ et compris eux-mêmes entre A' et B', et ainsi de suite. Si l'on observe que l'on a

$$A \leqq A' \leqq A'' \leqq \ldots \leqq A^{(m)} < B^{(m)} \leqq B^{(m-1)} \leqq \ldots \leqq B,$$

on voit que les nombres A, A', A'', ..., ne croissant pas au delà de B, ont une limite a; que les nombres B, B', ..., ne descendant pas au-dessous de A, ont une limite b; enfin que $a = b$, car $A^{(m)} - B^{(m)}$ peut être pris aussi petit que l'on veut; sa limite $a - b$ est donc nulle.

Enfin $\varphi(\varepsilon')$ pouvant être compris entre $A^{(m)}$ et $B^{(m)}$ différera de la limite a d'une quantité moindre que $A^{(m)} - B^{(m)}$ ou $E^{(m)}$, c'est-à-dire moindre que toute quantité donnée. Il résulte de là que $\varphi(\varepsilon')$ a pour limite $a = b$: le théorème que nous avons énoncé est donc démontré (*voir* t. I, p. 30).

Voici quelques applications :

1° L'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, quoique la quantité placée sous le signe $\int$ devienne infinie pour $x = -1$ et $x = +1$, est finie, parce que les intégrales singulières

$$\int_{-1+\varepsilon}^{-1+\varepsilon'} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int_{+1-\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

sont nulles; en effet, la quantité sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$\frac{e^x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}} \quad \text{ou} \quad \frac{e^x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x}}.$$

Or l'exposant du facteur qui s'annule au dénominateur est

moindre que un, et, comme $\frac{e^x}{\sqrt{1-x}}$ n'est ni nul ni infini pour $x = -1$, il en résulte que la première intégrale singulière est nulle; on verrait qu'il en est de même de la seconde.

2° L'intégrale $\int_0^{+\pi} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x}$ est finie. Pour le constater, il faut étudier l'intégrale singulière $\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x}\cdot$ Si nous y changeons x en $\frac{1}{x}$, elle deviendra $-\int_e^{e'} \frac{\sin x\,dx}{x}$, e et e' désignant $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\frac{1}{\varepsilon'}$, c'est-à-dire des nombres très grands. Si nous décomposons cette intégrale en d'autres ayant pour limites $e \gtreqq 2k\pi$ et $(2k+1)\pi$, $(2k+1)\pi$ et $(2k+2)\pi$, ..., la première et la dernière seront négligeables; quant aux autres, elles formeront une suite décroissante de termes alternativement positifs et négatifs; leur somme sera donc moindre que la première d'entre elles, c'est-à-dire infiniment petite : ainsi notre intégrale singulière étant nulle, l'intégrale proposée sera finie.

IV. — Explication d'un paradoxe.

Si l'on applique la formule

(1) $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0),$$

$F(x)$ désignant une des fonctions qui ont pour dérivées $f(x)$, quand la fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur de x comprise entre x_0 et X, on peut trouver des résultats inexacts; d'ailleurs, la notion d'intégrale définie ayant été généralisée, il faut aussi, avant de l'employer, généraliser les formules démontrées seulement dans le cas où la fonction placée sous le signe $\int$ ne devient pas infinie.

Considérons, par exemple, l'intégrale

(2) $$\int_{-}^{+1} \frac{dx}{x^2};$$

si l'on applique la formule (1) en supposant $f(x)=\frac{1}{x^2}$, on aura $F(x)=-\frac{1}{x}$ et l'on trouvera

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}=-2,$$

résultat évidemment absurde, tous les éléments de l'intégrale étant positifs. Il est facile de s'assurer que l'intégrale (2) est infinie, et en effet, en appelant ε et ε' des infiniment petits,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}&=\lim\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{\varepsilon'}^{+1}\frac{dx}{x^2}\right)\\&=\lim\left(\frac{1}{\varepsilon}-1+\frac{1}{\varepsilon'}-1\right)=\infty.\end{aligned}$$

Quoi qu'il en soit, quand on se sera assuré que l'intégrale $\int_{x_0}^{X}f(x)dx$ a une valeur finie, c'est-à-dire que toutes les intégrales singulières qu'elle contient sont nulles, on pourra encore appliquer la formule (1), mais avec certaines précautions.

Supposons en effet $f(x)$ infini, pour $x=c$, nous aurons

$$\int_{x_0}^{X}f(x)dx=\int_{x_0}^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c-\varepsilon}^{c+\eta}f(x)dx+\int_{c+\eta}^{X}f(x)dx,$$

ε et η désignant des infiniment petits. Si l'intégrale singulière est nulle, on a

$$\int_{x_0}^{X}f(x)dx=F(c-\varepsilon)-F(x_0)+\omega+F(X)-F(c+\eta),$$

ω désignant l'intégrale singulière qui s'évanouit par hypothèse avec ε et η; or, si $F(x)$ est continue pour $x=c$, $F(c-\varepsilon)$ et $F(c+\eta)$ tendent vers la même limite $F(c)$ et l'on a dans ce cas, *mais dans ce cas seulement,*

$$\int_{x_0}^{X}f(x)dx=F(X)-F(x_0).$$

V. — Des intégrales prises entre des limites infinies.

Les symboles

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\quad \int_{\infty}^{a} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

sont équivalents à ceux-ci

$$\lim \int_a^h f(x)\,dx,\quad \lim \int_{-k}^{a} f(x)\,dx,\quad \lim \int_{-k}^{h} f(x)\,dx,$$

pour $h = \infty$, $k = \infty$, ainsi qu'il a été dit plus haut. Pour reconnaître si de pareilles intégrales sont finies ou infinies, la marche est toute tracée quand on peut évaluer l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$; on calcule cette intégrale, on lui donne des limites variables et dans le résultat on fait croître indéfiniment la limite qui doit devenir infinie.

Mais il n'est pas nécessaire de calculer la valeur d'une intégrale dont les limites sont infinies pour reconnaître si elle a une valeur bien déterminée. En général :

Pour que l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,$$

dans laquelle $f(x)$ ne devient pas infinie quand on fait varier x de a à ∞, ait une valeur bien déterminée, il suffit que l'intégrale singulière

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

dans laquelle ε et ε' croissent indéfiniment, ait une valeur nulle, quel que soit la manière dont on fait croître ces deux quantités.

La démonstration de ce théorème est identique à celle qui a été donnée (p. 97).

Pour reconnaître si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

est finie ou infinie, il est clair que l'on peut la décomposer en

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,\quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx,\quad \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$$

et chercher si celles-ci sont finies ou infinies.

Soit α un nombre plus grand que un ; si la limite du produit $f(x)x^\alpha$ est nulle pour $x=\infty$, l'intégrale singulière

(1) $$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx$$

est nulle, ε et ε' tendant tous deux vers $+\infty$.

En effet, si la limite de $f(x)x^\alpha$ est nulle, posons

$$f(x)x^\alpha = \varphi(x),$$

l'intégrale singulière en question s'écrira

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx,$$

et, en appelant M une quantité égale à la plus grande valeur que puisse prendre $\varphi(x)$ entre les limites ε et ε', on voit que l'intégrale (1) est moindre en valeur absolue que

$$M\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x^\alpha},\quad \text{ou}\quad \frac{M}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right);$$

cette quantité est évidemment nulle pour $\varepsilon=\infty$ et $\varepsilon'=\infty$, lorsque $\alpha>1$, puisque M a pour limite 0 pour $x=\infty$.

On démontrerait de même que, *si α est plus grand que un et si la limite de $f(x)x^\alpha$ est nulle pour $x=-\infty$, l'intégrale* (1) *est nulle quand on suppose ε et ε' égaux à $-\infty$.*

Si le nombre α est plus petit que un, ou s'il est égal à un, si de plus la limite de $f(x)x^\alpha$ pour $x=\infty$ est finie, ou

même si $f(x)x^\alpha$ croît en conservant le même signe, l'intégrale

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} f(x)\,du$$

est infinie pour $\varepsilon' = \infty$, pourvu que ε soit suffisamment grand.

En effet, posant toujours $\varphi(x) = f(x)x^\alpha$, l'intégrale en question est égale à

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx,$$

et, en appelant M une quantité inférieure en valeur absolue à la valeur minima que prend $\varphi(x)$ entre les limites ε et ε', valeur que l'on peut supposer plus grande que zéro, on voit que

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx > \mathrm{M}\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{dx}{x^\alpha};$$

si $\alpha = 1$, on a

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha} > \mathrm{M}\log\frac{\varepsilon'}{\varepsilon};$$

si $\alpha < 1$, on trouve

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha} > \frac{\mathrm{M}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right);$$

dans les deux cas l'intégrale est infinie pour $\varepsilon' = \infty$.

On verrait de même que :

Si le nombre α est plus petit que un ou égal à un, si de plus l'expression $f(x)x^\alpha$ est finie ou infinie, mais différente de 0 pour $x = -\infty$, l'intégrale

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} f(x)\,dx$$

est infinie pour $\varepsilon' = -\infty$, pourvu que ε soit négatif et suffisamment grand en valeur absolue.

Il faut bien remarquer que, pour qu'une intégrale singulière à limites infinies soit nulle ou, si l'on veut, pour qu'une intégrale ordinaire dont une limite est infinie ait une valeur

bien déterminée, il n'est pas nécessaire que la quantité placée sous le signe $\int$ ait pour limite zéro quand la variable devient infinie. Tout ce que l'on peut affirmer, c'est que la quantité placée sous le signe $\int$ ne doit pas conserver un signe constant et rester pour de grandes valeurs de la variable supérieure à une quantité finie.

L'intégrale

$$\int_1^\infty \left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 dx,$$

par exemple, est finie; car elle est égale à

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx,$$

comme on le constate en changeant x en $\frac{1}{x}$.

Les théorèmes qui précèdent suffiront dans un grand nombre de cas pour décider si une intégrale est ou n'est pas finie. On arrivera aussi à décider si une intégrale est ou n'est pas finie, en la comparant à une autre, dont les éléments sont manifestement plus grands ou plus petits et dont la valeur sera connue.

Faisons maintenant quelques applications.

L'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

est finie, parce que la limite de $x^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ pour $x=\infty$ est nulle.

L'intégrale

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\log x\sqrt{1+x^2}}$$

n'est pas plus difficile à discuter; toutefois, en considérant l'intégrale singulière

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{dx}{\log x\sqrt{1+x^2}} = \int_\varepsilon^{\varepsilon'} \frac{dx}{x\log x}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

on voit qu'elle est plus grande que, par exemple, la moitié de

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x \log x} = \log\log\varepsilon' - \log\log\varepsilon$$

ou de $\log\frac{\log\varepsilon'}{\log\varepsilon}$, quantité qui est aussi grande que l'on veut en prenant ε' suffisamment grand par rapport à ε : l'intégrale considérée est donc infinie.

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} + \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$$

est finie, parce que toutes les intégrales dans lesquelles elle se décompose sont finies, ou, si l'on veut, parce que les intégrales singulières

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}, \quad \int_{1\pm\varepsilon}^{1\pm\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}, \quad \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}},$$

où ε et ε' sont infiniment petits dans les deux premières, infinis dans la dernière, sont nulles.

VI. — Théorème de Cauchy.

La série

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) \ldots$$

et l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$$

ont en même temps des valeurs finies ou infinies, quand $\varphi(x)$ désigne une fonction indéfiniment décroissante de o *à* ∞ *et ayant pour limite* o.

En effet, on a

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx + \int_1^2 \varphi(x)\,dx + \int_2^3 \varphi(x)\,dx + \ldots.$$

et évidemment

$$(1) \qquad \int_0^n \varphi(x)\,dx < \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n-1);$$

si donc, pour $n = \infty$, la série est convergente, le second membre sera fini et, par suite, le premier aussi. D'un autre côté,

$$(2) \qquad \int_0^n \varphi(x)\,dx > \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n),$$

et si, pour $n = \infty$, le second membre est infini, la série sera divergente et l'intégrale sera infinie. De même, si l'intégrale est finie, le premier membre (2) reste fini, le second membre aussi et, par suite, la série est convergente; (1) montre que si l'intégrale est infinie la série est divergente : donc, etc.

C. Q. F. D.

Voici quelques applications :

La série

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots$$

est convergente si k est plus grand que l'unité; en effet, ici $\varphi(n) = \frac{1}{n^k}$, et l'on a

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \left[-\frac{1}{(k-1)x^{k-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{k-1},$$

quantité finie quand on suppose $k > 1$. On prouve de même que la série est divergente pour $k < 1$ ou pour $k = 1$.

La série dont le terme général est $\frac{1}{n \log n}$ est divergente, parce que $\int_2^\infty \frac{dx}{x \log x} = (\log\log x)_2^\infty$ est infini.

La série dont le terme général est $\frac{1}{n \log n \log\log n}$ est divergente pour une raison analogue, etc.

VII. — Rapprochements entre les séries et les intégrales définies.

Théorème d'Abel. — *Soient a_0, a_1, a_2, ... des nombres qui ne vont pas en croissant, en sorte que $a_0 \geqq a_1 \geqq a_2, \ldots,$*

$$(1) \quad s_0 = u_0, \quad s_1 = u_0 + u_1, \quad \ldots, \quad s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

et M le plus grand des modules des sommes s_0, s_1, ..., s_n, on aura

$$\operatorname{mod}(a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n) < \mathrm{M} a_0.$$

En effet, des formules (1) on tire

$$u_1 = s_1 - s_0, \quad u_2 = s_2 - s_1, \quad \ldots, \quad u_n = s_n - s_{n-1}$$

et, par suite,

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = a_0 s_0 + a_1(s_1 - s_0) + \ldots + a_n(s_n - s_{n-1})$$

ou

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$$
$$= s_0(a_0 - a_1) + s_1(a_1 - a_2) + \ldots + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + s_n a_n.$$

Aucune des différences $a_0 - a_1$, $a_2 - a_1$, ... n'est négative; si donc on remplace s_0, s_1, ... par M, on aura

$$a_0 u_0 + \ldots + a_n u_n < \mathrm{M}(a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + \ldots + a_n) \quad \text{ou} \quad < \mathrm{M} a_0.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Si la série*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, et si les nombres a_0, a_1, ... positifs ne vont pas en croissant, la série

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

sera convergente.

Car la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ pourra être prise moindre que $\mathrm{M} a_n$, c'est-à-dire aussi petite que l'on voudra, puisque M est la plus grande des quantités $\operatorname{mod} u_n$, $\operatorname{mod}(u_n + u_{n+1})$, $\operatorname{mod}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2})$, etc.

Corollaire II. — *Si $\varpi(x)$ est une fonction positive qui ne va pas en croissant quand x varie de a à ∞ et si l'intégrale* (¹)

$$(1) \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx$$

est finie, l'intégrale

$$(2) \qquad \int_a^\infty f(x)\varpi(x)\,dx$$

le sera aussi.

Car, en vertu du théorème d'Abel qui précède, en appelant M la plus grande valeur absolue de la somme

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{n=m} f(\varepsilon + n\theta\,\Delta x)\Delta x,$$

où $0 < \theta < 1$, quand m varie de 0 à ∞, on aura

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{n=m} f(\varepsilon + n\theta\,\Delta x)\varpi(\varepsilon + n\theta\,\Delta x)\Delta x < \mathrm{M}\varpi(\varepsilon).$$

Or, si l'on suppose que n croisse indéfiniment, on voit que, ε étant censé supérieur à a et μ désignant la plus grande valeur que puisse prendre

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

on aura

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} f(x)\varpi(x)\,dx < \mu\,\varpi(\varepsilon);$$

or la première intégrale singulière est infiniment petite pour $\varepsilon = \infty$; la seconde l'est donc aussi, ce qui prouve que (2) est finie. C. Q. F. D.

(¹) Par fonction qui ne va pas en croissant, nous entendons ici une fonction $\varpi(x)$ telle que, h étant positif, on n'a jamais $\varpi(x+h) > \varpi(x)$.

VIII. — Sur les précautions à prendre quand on passe de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie.

Le moyen le plus régulier pour calculer une intégrale définie consiste dans l'application de la formule

$$\int_{x_0}^{X} F'(x)\,dx = F(X) - F(x_0); \tag{1}$$

mais l'application de cette formule, lorsque l'on connaît la fonction $F(x)$ qui a pour dérivée $F'(x)$, présente quelques difficultés qu'il est bon de signaler.

Proposons-nous, par exemple, d'évaluer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}. \tag{2}$$

L'intégrale indéfinie est $\operatorname{arc\,tang} x$, ou plutôt l'une des valeurs de $\operatorname{arc\,tang} x$, et il semble que $\operatorname{arc\,tang} 1 - \operatorname{arc\,tang}(-1)$ soit une valeur *indéterminée* de notre intégrale donnée par la formule (1), car $\operatorname{arc\,tang} 1 - \operatorname{arc\,tang}(-1)$ est de la forme $k\pi + \frac{\pi}{2}$, k désignant un entier quelconque. Ce résultat est évidemment absurde *a priori*, et provient d'une interprétation mauvaise de la formule (1).

Voici comment il faut présenter les choses :

Considérons l'intégrale

$$Z = \int_{1}^{z} \frac{dx}{1+x^2}$$

qui, pour $z = 1$, est égale à l'intégrale cherchée. Z pour $z = -1$ est égal à zéro, puisque cette intégrale n'a pas d'éléments, et elle varie en croissant d'une manière continue avec z : quelle que soit la valeur de $\operatorname{arc\,tang} x$ choisie pour représenter l'intégrale indéfinie de $\frac{dx}{1+x^2}$, la valeur de Z, qui est une de celles de l'expression

$$\operatorname{arc\,tang} z - \operatorname{arc\,tang}(-1) \tag{3}$$

devra varier d'une manière continue, et la valeur de arc tang z, qui figure dans la formule (3), devra elle-même varier d'une manière continue. Elle ne pourra franchir un multiple de $\frac{\pi}{2}$, puisque z ne devient jamais infinie; elle est donc bien déterminée pour $z=+1$, quand on a choisi la valeur de arc tang(-1); si donc on prend arc tang(-1) égal à $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, k étant un entier quelconque, il faudra prendre arc tang$(+1)=+\frac{\pi}{4}+k\pi$, et la valeur de Z, pour $z=1$, ou l'intégrale cherchée (2), sera égale à

$$\frac{\pi}{4}+k\pi-\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\frac{\pi}{2}.$$

La valeur de (2) est donc bien déterminée et égale à $\frac{\pi}{2}$. On trouve d'une manière semblable

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi,\qquad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

C'est ici l'occasion de faire connaître un beau théorème de Cauchy et de parler de la notion de l'*indice* d'une fonction.

IX. — Théorie des indices de Cauchy.

Cauchy appelle *indice de la fonction* $f(x)$, pour une valeur de x qui la rend infinie, le nombre -1 si elle passe du négatif au positif quand x croît, $+1$ si elle passe du positif au négatif, et 0 si elle ne change pas de signe.

L'*indice* de $f(x)$ entre les limites x_0 et X est la somme des indices de $f(x)$ pour les valeurs de x qui entre ces limites la rendent infinie; en d'autres termes, l'indice de $f(x)$ entre les limites x_0 et X est égal à $N-n$, N désignant le nombre de fois qu'elle passe du positif au négatif et n le nombre de fois qu'elle passe du négatif au positif en devenant infinie,

quand x croît de x_0 à X; l'indice en question se représente au moyen de la notation

$$\mathbf{I}_{x_0}^{X} f(x).$$

THÉORÈME I. — *Soit $f(x)$ une fonction qui ne devienne discontinue qu'en passant par l'infini; l'intégrale*

$$u = \int_{x_0}^{X} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$$

aura pour valeur

$$[\operatorname{arc\,tang} f(X)] - [\operatorname{arc\,tang} f(x_0)] + \pi \mathbf{I}_{x_0}^{X} f(x),$$

la notation [arc tang x] *désignant un arc compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$.

En effet, l'intégrale indéfinie de $\frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$ est évidemment arc tang $f(x)$, à une constante près; si nous prenons pour limites x_0 et X, nous aurons donc

$$u = \operatorname{arc\,tang} f(X) - \operatorname{arc\,tang} f(x_0);$$

mais le second membre a besoin de recevoir une acception précise. Si l'on prend pour arc tang $f(x_0)$ la valeur [arc tang $f(x_0)$] comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, pour fixer les idées, il faudra que u s'annule pour $X = x_0$, et l'on aura, pour des valeurs de X très voisines de x_0,

$$u = [\operatorname{arc\,tang} f(X)] - [\operatorname{arc\,tang} f(x_0)].$$

que nous écrirons

$$u = \operatorname{arc\,tang} f(X) - [\operatorname{arc\,tang} f(x_0)].$$

Faisons croître X; u va commencer par croître en valeur absolue et va varier, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, jusqu'à ce que X passe par une valeur rendant $f(X)$ infini; à ce moment, arc tang $f(X)$ passe par $\pm\frac{\pi}{2}$:

1° Il franchit la valeur $\frac{\pi}{2}$ si $f(X)$ passe du positif au négatif, c'est-à-dire si son indice est $+1$;

2° Il franchit la valeur $-\frac{\pi}{2}$ si l'indice de $f(X)$ est -1;

3° Il ne franchit aucune des valeurs $\pm\frac{\pi}{2}$ si l'indice de $f(X)$ est zéro.

En général, $\operatorname{arc\,tang} f(X)$ franchira un multiple de $\frac{\pi}{2}$ en croissant quand l'indice de $f(X)$ sera $+1$; il franchira un multiple de $\frac{\pi}{2}$ en décroissant si l'indice de $f(X)$ est -1; enfin il passera par un multiple de $\frac{\pi}{2}$, sans le franchir, si l'indice de $f(X)$ est zéro. Supposons alors que, X variant à partir de x_0, il passe par des valeurs de $x_1, x_2, \ldots$ rendant infinie la fonction $f(x)$, pour lesquelles l'indice de cette fonction soit successivement α fois de suite $+1$, β fois de suite 0, γ fois de suite -1, etc. Si l'on désigne par ε un infiniment petit positif, $\operatorname{arc\,tang} f(x_1+\varepsilon)$ sera égal à $[\operatorname{arc\,tang} f(x_1+\varepsilon)]+\pi$, $\operatorname{arc\,tang} f(x_2+\varepsilon)$ sera égal à $[\operatorname{arc\,tang} f(x_2+\varepsilon)]+2\pi, \ldots$, $\operatorname{arc\,tang} f(x_\alpha+\varepsilon)$ sera égal à $[\operatorname{arc\,tang} f(x_\alpha+\varepsilon)]+\alpha\pi$; puis, pour les valeurs $x_{\alpha+1}, \ldots, x_\beta$, $\operatorname{arc\,tang} f(x+\varepsilon)$ restera toujours compris entre les mêmes multiples de $\frac{\pi}{2}$; mais on aura

$$\operatorname{arc\,tang} f(x_{\beta+1}+\varepsilon) = [\operatorname{arc\,tang} f(x_{\beta+1}+\varepsilon)]+\alpha\pi, \quad \ldots,$$

et, en définitive, $\operatorname{arc\,tang} f(X)$ sera égal à $[\operatorname{arc\,tang} f(X)]$ augmenté de $\alpha\pi+0\pi-\gamma\pi+\ldots$, c'est-à-dire d'autant de fois π qu'il y a d'unités dans l'indice $\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} f(x)$; on a donc

$$\int_{x_0}^{X} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \pi \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} f(x) + [\operatorname{arc\,tang} f(X)] - [\operatorname{arc\,tang} f(x_0)],$$

ce qu'il fallait prouver.

Théorème II. — *On a*

$$\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} f(x) + \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_0)}{\sqrt{f^2(x_0)}} - \frac{f(X)}{\sqrt{f^2(X)}}\right].$$

En effet, on a

$$\int_{x_0}^{X} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \pi \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} f(x) + [\operatorname{arc\,tang} f(X)] - [\operatorname{arc\,tang} f(x_0)],$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{f(x)}}{1+\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]^2}\,dx = \pi \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \left[\frac{1}{f(x)}\right] + \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(X)}\right] - \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(x_0)}\right];$$

or le premier membre de la dernière équation est égal à

$$-\int_{x_0}^{X} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx;$$

donc, en ajoutant, il vient

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \pi\left[\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} f(x) + \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)}\right] \\ & + [\operatorname{arc\,tang} f(X)] + \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(X)}\right] \\ & - [\operatorname{arc\,tang} f(x_0)] - \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(x_0)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Or $[\operatorname{arc\,tang} f(X)]$ et $\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(X)}\right]$ sont tous deux compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; donc, si $f(X)$ est positif, $[\operatorname{arc\,tang} f(X)]$ est positif et $\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(X)}\right] = \frac{\pi}{2} - [\operatorname{arc\,tang} f(X)]$; si $f(X)$ est négatif, il en sera de même de $[\operatorname{arc\,tang} f(X)]$ et de $\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(X)}\right]$, qui sera égal à $-\left\{[\operatorname{arc\,tang} f(X)] + \frac{\pi}{2}\right\}$. On a donc

$$[\operatorname{arc\,tang} f(X)] + \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{f(X)}\right] = \pm\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{f(X)}{\sqrt{f^2(X)}};$$

la formule (a) devient alors

$$\pi\left[\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} f(x) + \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)}\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{f(X)}{\sqrt{f^2(X)}} - \frac{f(x_0)}{\sqrt{f^2(x_0)}}\right],$$

ce qui donne la formule que l'on voulait démontrer.

Ce théorème peut se démontrer sans le secours du Calcul intégral, en observant que, si a, b, c, ... sont les zéros et les infinis de $f(x)$ rangés par ordre de grandeur à partir de x_0, les indices successifs de $f(x)$ et de $\frac{1}{f(x)}$ seront

Pour $f(x_0) > 0$....... $+1-1+1-1...$,
Pour $f(x_0) < 0$....... $-1+1-1+1....$

Si $\varphi(x)$ désigne un polynôme entier, la fonction $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ passe toujours du négatif au positif : son indice ne peut jamais être 0 ou -1 et, par suite, en appelant N le nombre des racines de $\varphi(x)=0$ comprises entre x_0 et X, on a

$$N = \mathbf{I}_{x_0}^{X} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Il en résulte la formule suivante, due à Cauchy :

$$\int_{x_0}^{X} \frac{\varphi''(x)\varphi(x)-\varphi'^2(x)}{\varphi^2(x)+\varphi'^2(x)}\,dx$$
$$= \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{\varphi'(X)}{\varphi(X)}\right] - \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{\varphi'(x_0)}{\varphi(x_0)}\right] + N\pi.$$

Théorème de Sturm. — Nous ferons usage, dans ce qui va suivre, de la formule démontrée plus haut

$$\mathbf{I}_{x_0}^{X} f(x) + \mathbf{I}_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(X)}{\sqrt{f^2(X)}} - \frac{f(x_0)}{\sqrt{f^2(x_0)}}\right],$$

mais nous l'écrirons sous une forme plus commode. Nous emploierons la notation SA pour représenter $+1$ si A est positif, 0 s'il est nul et -1 s'il est négatif; on pourra énoncer ce symbole signe de A. La formule précédente donnera alors

$$(1) \qquad \mathbf{I}_{x_0}^{X} f(x) + \mathbf{I}_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}[\mathrm{S}f(x) - \mathrm{S}f(x_0)].$$

Cela posé, considérons deux polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$, le degré de φ_1 étant égal ou inférieur à celui de φ. Soit $\varphi_2(x)$

le reste changé de signe de la division de φ par φ_1 ; soit φ_3 le reste changé de signe de la division de φ_1 par φ_2, etc.

On aura d'abord, en appelant Q le quotient de φ par φ_1,

$$\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \left[Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right]$$

ou

$$\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = -\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)},$$

ce qui simplifie la recherche de l'indice des fonctions rationnelles. De cette formule on tire

$$\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = -\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = -\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)},$$

. . . .

$$\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = 0,$$

φ_n désignant une constante, un diviseur de $\varphi_{n-1}(x)$ ou une fonction qui ne s'annule plus entre x_0 et X ; on déduit de là

$$-\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_2}{\varphi_3} + \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_3}{\varphi_2} + \ldots + \mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n};$$

mais, en faisant usage de (1), on a

$$\begin{aligned} -\mathop{\mathbf{I}}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = {} & \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)} + \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\varphi_2(X)}{\varphi_1(X)} + \ldots + \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\varphi_{n-1}(X)}{\varphi_n(X)} \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)} - \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\varphi_2(x_0)}{\varphi_1(x_0)} - \ldots - \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\varphi_{n-1}(x_0)}{\varphi_n(x_0)}. \end{aligned}$$

Or u et v forment en général une variation ou une permanence, selon que $\mathbf{S}\frac{u}{v}$ est égal à -1 ou à $+1$; donc, en appelant V le nombre de variations de la suite

$$\varphi(X), \quad \varphi_1(X), \quad \varphi_2(X), \quad \ldots, \quad \varphi_n(X).$$

et P le nombre de ses permanences ; v_0 le nombre des variations de la suite

$$\varphi(x_0),\quad \varphi_1(x_0),\quad \varphi_2(x_0),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x_0)$$

et p_0 le nombre de ses permanences, on aura

$$-\mathbf{I}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{1}{2}[P - V - p_0 + v_0]$$

ou

$$\mathbf{I}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{1}{2}(V - P) - \frac{1}{2}(v_0 - p_0);$$

mais $V - v_0 = p_0 - P$, car le nombre des variations gagnées ou perdues en passant de x_0 à X est égal au nombre des permanences perdues ou gagnées par la suite considérée dans les mêmes circonstances; donc

$$\mathbf{I}_{x_0}^{X} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = V - v_0.$$

Si $\varphi_1(x)$ est la dérivée de $\varphi(x)$, la formule précédente contient précisément l'énoncé du fameux théorème de Sturm.

X. — Des précautions à prendre quand on effectue un changement de variables.

En général, on a vu que

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Cette formule est-elle applicable aux intégrales définies? Nous examinerons successivement plusieurs cas :

1° Nous supposerons que l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

remplisse les conditions suivantes : x_0 sera plus petit que X (ce que l'on peut toujours supposer), la fonction $f(x)$ ne

sera pas infinie entre x_0 et X, et x_0 et X eux-mêmes seront finis. La fonction $\varphi(t) = x$ se réduira à x_0 pour $t = t_0$ et à X pour $t = T$; enfin, t variant de t_0 à T, $\varphi(t)$ ne deviendra jamais infini ou discontinu, aura une dérivée bien déterminée et ira toujours en croissant de x_0 à X. Dans ces conditions, je dis que l'on aura

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

En effet, dans ce cas, en appelant F(x) une fonction ayant pour dérivée $f(x)$, la formule précédente revient à celle-ci

$$F(X) - F(x_0) = F[\varphi(T)] - F[\varphi(t_0)],$$

mais cette démonstration a l'inconvénient de ne pas pénétrer au cœur de la question et de masquer les véritables difficultés du problème qui nous occupe.

On a

$$(2) \quad \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim[f(\xi_1)\Delta x_0 + f(\xi_2)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_{n-1}],$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ désignant des quantités $x_0 + \theta_0 \Delta x_0, x_1 + \theta_1 \Delta x_1, \ldots$, comprises respectivement entre x_0 et x_1, entre x_1 et x_2, ... Si l'on pose $x = \varphi(t)$, ξ_i devra être remplacé par $\varphi(\tau_i)$, τ_i désignant une quantité comprise entre les valeurs t_{i-1} et t_i de t, pour lesquelles on a $\varphi(t_{i-1}) = x_{i-1}$, $\varphi(t_i) = x_i$; du reste, Δx_i ou $\Delta\varphi(t_i)$ étant égal à $\Delta t_i \varphi'(t_i + \theta_i \Delta t_i)$, la formule (2) donnera

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$
$$= \lim[f(\xi_1)\varphi'(t_0 + \theta_0 \Delta t_0)\Delta t_0 + \ldots + f(\xi_n)\varphi'(t_{n-1} + \theta_{n-1}\Delta t_{n-1})\Delta t_{n-1}],$$

$\theta_0, \theta_1, \ldots$ désignant des quantités comprises entre 0 et 1. Or $\xi_1, \xi_2, \ldots$ étant des nombres quelconques compris entre x_0 et x_1, x_1 et x_2, ..., on peut supposer

$$\xi_1 = \varphi(t_0 + \theta_0 \Delta t_0), \qquad \xi_2 = \varphi(t_1 + \theta_1 \Delta t_1), \ \ldots$$

L'équation précédente se réduit alors à

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

C'est précisément la formule (1) qu'il fallait établir. Elle met en relief cette proposition qui n'est pas toujours établie avec suffisamment de rigueur, à savoir que :

L'intégrale d'une fonction est la limite de la somme des valeurs que prend cette fonction multipliée par la différentielle de sa variable quand cette différentielle tend vers zéro. Ce qui justifie la notation $\int f\,dx$.

2° Nous supposerons maintenant que, x variant de x_0 à X, la nature de la fonction $\varphi(t)$ soit telle que t n'aille pas sans cesse en croissant ou en décroissant de t_0 à T, les autres suppositions faites tout à l'heure subsistant dans leur ensemble.

D'abord ce que nous avons dit s'appliquerait au cas où t décroîtrait de t_0 à T; supposons donc que, x variant de x_0 à X en croissant, t croisse d'abord de t_0 à t_1, puis décroisse de t_1 à t_2, ... Soient x_1, x_2, ... les valeurs de $x = \varphi(t)$ pour $t = t_1, t_2, \ldots$; nous aurons

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots.$$

La formule (1) est applicable à chacune des intégrales qui figurent dans le second membre; on a donc, dans le cas actuel,

$$(3)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi)\varphi'(t)\,dt + \ldots,$$

et le second membre ne sera généralement pas égal à

$$\int_{t_0}^{T} f(\varphi)\varphi'(t)\,dt.$$

Pour bien nous en convaincre, nous allons faire une application.

Considérons l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} dx = 2.$$

Si nous posons $x = \sqrt{t}$, nous aurons $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$; l'application de la formule (1) donnerait

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_{1}^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 0,$$

résultat faux; effectivement, x variant de -1 à $+1$, t varie en décroissant de 1 à 0, puis se remet à croître à partir de 0 jusqu'à 1; on aura donc, en appliquant la formule (3),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} dx &= \int_{-1}^{0} dx - \int_{0}^{1} dx \\ &= \int_{1}^{0} -\frac{dt}{2\sqrt{t}} + \int_{0}^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2\int_{0}^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

L'intégrale indéfinie étant $2\sqrt{t}$, l'intégrale définie sera 2, ainsi que cela doit être. Nous avons d'ailleurs remplacé, dans l'intégrale $\int_{-1}^{0} dx$, x par $-\sqrt{t}$, parce que x y est négatif.

3° Faisant les mêmes hypothèses, d'ailleurs, que dans le premier cas, si l'on suppose, par exemple, $t_1 = \infty$, on aura bien

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{\infty} f(\varphi)\,\varphi'(t)\,dt;$$

en effet, $\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx$ sera égal à $\int_{t_0}^{t'} f(\varphi)\,\varphi'(t)dt$, t' désignant la valeur de t pour laquelle x est égal à $x_1 - \varepsilon$; cette égalité ayant toujours lieu, on aura encore à la limite

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{\infty} f(\varphi)\,\varphi'(t)\,dt.$$

XI. — Remarques au sujet de l'intégration par parties.

Lorsque l'on veut calculer la valeur d'une intégrale définie, on peut commencer par calculer celle de l'intégrale indéfinie; mais, s'il arrive que l'on soit obligé d'appliquer la règle d'intégration par parties, on peut abréger un peu les calculs.

Cette règle consiste dans la formule

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du;$$

on peut prendre les deux membres entre les limites x_0 et X de x; on a alors

$$\int_{x=x_0}^{x=X} u\,dv = (uv)_{x_0}^{X} - \int_{x=x_0}^{x=X} v\,du,$$

la notation $(uv)_{x_0}^{X}$ indiquant que l'on doit dans uv remplacer x successivement par x_0 et X, et faire la différence des résultats ainsi obtenus. Cauchy a aussi employé la notation $\Big|_{x_0}^{X} uv$ pour représenter la même quantité; il emploie d'ailleurs la notation $\Big|^{x_0}$ pour indiquer que x_0 doit remplacer x. Ainsi

$$\Big|_{x_0}^{X} f(x) = \Big|^{X} f(x) - \Big|^{x_0} f(x) = f(X) - f(x_0).$$

Pour appliquer les considérations précédentes, proposons-nous de calculer la valeur de l'intégrale

$$u_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m}.$$

On a

$$u_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}} - \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^m}\right],$$

$$u_m = u_{m-1} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^m};$$

en intégrant par parties, il vient

$$u_m = u_{m-1} + \left[\frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}}$$

ou

$$u_m = u_{m-1}\left(1 - \frac{1}{2m-2}\right) = \frac{2m-3}{2m-2}\,u_{m-1}.$$

On a alors, en donnant à m les valeurs 1, 2, 3, ...,

$$\begin{aligned} u_2 &= \tfrac{1}{2}\,u_1 = \tfrac{1}{2}\,\pi, \\ u_3 &= \tfrac{3}{4}\,u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ u_m &= \frac{2m-3}{2m-2}\,u_{m-1}, \end{aligned}$$

et, par suite, en multipliant membre à membre,

$$u_m = \frac{1.3.5\ldots\overline{2m-3}}{2.4.6\ldots\overline{2m-2}}\,\pi.$$

Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

qui est finie, comme nous l'avons vu ; l'intégrale indéfinie est $\arcsin x$; x variant de 0 à 1, l'arc sinus varie de $\frac{\pi}{2}$: donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2};$$

on a aussi

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\sqrt{1-x^2}\right)_0^1 = 1.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{x^{m-1}(-x\,dx)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\left(x^{m-1}\sqrt{1-x^2}\right)_0^1 + (m-1)\int_0^1 x^{m-2}\,\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$

la partie intégrée est nulle, et, en appelant le premier membre u_m, on a

$$u_m = \frac{m-1}{m} u_{m-2};$$

faisant alors $m = 2, 4, \ldots, 2n$, puis $m = 3, 5, \ldots, 2n+1$, il vient

$$\begin{array}{ll} u_0 = \frac{\pi}{2}, & u_1 = 1, \\ u_2 = \frac{1}{2} u_0, & u_3 = u_1 \frac{2}{3}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2}, & u_{2n+1} = u_{2n-1} \frac{2n}{2n+1}, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad u_{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \frac{\pi}{2}, \qquad u_{2n+1} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)}.$$

Cela posé, on a, en général,

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} = \frac{\int_0^1 x^m : \sqrt{1-x^2}\,dx}{\int_0^1 x^{m+1} : \sqrt{1-x^2}\,dx} > 1,$$

parce que les éléments du numérateur sont plus grands que ceux du dénominateur. Ainsi

$$u_m > u_{m+1} > u_{m+2}:$$

donc

$$\frac{u_m}{u_{m+2}} > \frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1$$

ou

$$\frac{m+1}{m} > \frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} > 1;$$

pour $m = \infty$ le premier membre converge vers 1 : donc $\lim \frac{u_{m+1}}{u_{m+2}} = 1$, et par suite, pour $n = \infty$, $\lim \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = 1$; la formule (1) donne alors

$$1 = \lim \frac{1^2 3^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2} \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n};$$

cette formule est due à Wallis.

XII. — Différentiation sous le signe $\int$.

Quand une intégrale définie contient sous le signe $\int$ un paramètre variable t, elle est ordinairement fonction continue de ce paramètre, puisqu'elle a, comme on l'a vu, une dérivée finie par rapport à ce paramètre. Il convient toutefois de revenir sur la démonstration que nous avons donnée de ce dernier théorème. Soit

$$(1) \qquad u = \int_a^b f(x, t)\,dx;$$

on en déduit, en faisant varier t,

$$u + \Delta u = \int_a^b f(x, t + \Delta t)\,dx,$$

$$\Delta u = \int_a^b [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)]\,dx$$

et, par suite,

$$(\text{A}) \qquad \frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}\,dx.$$

Or, si l'on suppose $f(x, t)$ fini entre les limites a et b de x et si l'on admet que cette fonction possède toujours une dérivée finie et en général bien déterminée $\frac{\partial f}{\partial t}$, on aura

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro, quel que soit t,

quand Δt tend vers zéro ; la formule (A) pourra donc s'écrire

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + \int_a^b \varepsilon\,dx.$$

Si l'on désigne par E la plus grande valeur que puisse prendre la valeur absolue de ε et par θ une quantité comprise entre -1 et $+1$, on aura

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + \theta \int_a^b \mathrm{E}\,dx$$

ou

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + \theta \mathrm{E}(b-a);$$

donc, en passant aux limites et en faisant $\Delta t = 0$, $\mathrm{E} = 0$

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx.$$

Mais cette démonstration suppose $b - a$ essentiellement fini ; elle ne s'applique donc pas aux intégrales prises entre des limites infinies.

Considérons l'intégrale

$$u = \int_a^\infty f(x, t)\,dx;$$

b étant positif et plus grand que a, posons

$$u_1 = \int_a^b f(x, t)\,dx;$$

on aura

$$u = u_1 + \int_b^\infty f(x, t)\,dx$$

et, en faisant $x = \frac{1}{z}$,

$$u = u_1 + \int_0^{\frac{1}{b}} f\left(\frac{1}{z}, t\right)\frac{dz}{z^2}.$$

Supposons que, z variant de o à $\frac{1}{b}$, $f\left(\frac{1}{z}, t\right)\frac{1}{z^2}$ conserve une valeur bien déterminée, ainsi que sa dérivée; il viendra

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{\partial f\left(\frac{1}{z}, t\right)}{\partial t} \frac{dz}{z^2}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \int_b^\infty \frac{\partial f}{\partial t}\, dx.$$

d'où l'on conclura

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}\, dx.$$

Ainsi, *de la formule* (1) *on pourra conclure*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\, dx,$$

pourvu que, les limites a, b restant finies, f ait entre ces limites de x une dérivée finie et bien déterminée ; on pourra encore en conclure cette formule quand a ou b seront infinis, mais alors $f\left(\frac{1}{x}, t\right)\frac{1}{x^2}$ devra être fini ainsi que sa dérivée relative à t quand x tend vers $\frac{1}{a}$ ou $\frac{1}{b}$.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\, dx.$$

Pour savoir si nous avons le droit de la différentier par rapport à t, posons, dans l'intégrale

$$\int_b^\infty \frac{\sin tx}{x}\, dx, \qquad x = \frac{1}{z},$$

nous aurons

$$\int_0^{\frac{1}{b}} \sin\frac{t}{z}\, \frac{dz}{z};$$

$\frac{1}{z}\sin\frac{t}{z}$ pour $z = 0$ est infini : sa dérivée d'ailleurs est infinie :

on ne peut donc pas différentier l'intégrale en question par rapport à t. Effectivement, on trouverait $\int_0^\infty \cos tx\,dx$, qui est indéterminé, tandis que $\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx$ est finie et bien déterminée, comme nous le verrons plus loin.

Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx\,;$$

l'expression $\frac{e^{-\frac{t}{x^2}}}{x^2}$, quand on suppose $x=0$, est finie ainsi que sa dérivée $-\frac{e^{-\frac{t}{x^2}}}{x^4}\cdot$ On aura donc le droit de différentier par rapport à t l'intégrale précédente, et la dérivée de cette intégrale sera

$$-\int_0^\infty x^2 e^{-tx^2}\,dx$$

On peut encore donner un autre criterium, pour voir si l'on peut appliquer la règle de la différentiation sous le signe $\int$ à une intégrale prise entre des limites infinies : on a en effet

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{f(x,\, t+\Delta t) - f(x,\, t)}{\Delta t}\,dx\,:$$

c'est la formule (A); elle peut s'écrire, si $f(x,\, t)$ a une dérivée seconde bien déterminée quand x varie de a à b,

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} f''(x,\, t+\theta\Delta t)\right] dx,$$

f'' étant mis pour $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ et θ désignant un nombre compris entre o et 1 ; on a donc

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + \frac{\Delta t}{2}\int_a^b f''(x,\, t+\theta\Delta t)\,dx;$$

et, *si l'intégrale*

$$\int_a^b f''(x, t)\,dx$$

n'est pas infinie, on pourra écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx,$$

lors même que a et b seraient infinis.

Reprenons, par exemple, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx$. La dérivée seconde de $\frac{\sin tx}{x}$ est $x \sin tx$; or $\int_0^\infty x \sin tx\,dx$ étant infini, on n'aura pas le droit de différentier sous le signe. Au contraire, si l'on considère l'intégrale $\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx$, la dérivée seconde de e^{-tx^2} est $x^4 e^{-tx^2}$ et l'intégrale

$$\int_0^\infty x^4 e^{-tx^2}\,dx$$

est finie comme la proposée; il viendra donc

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = -\int_0^\infty x^2 e^{-tx^2}\,dx.$$

Il va sans dire que l'on suppose $t > 0$.

La règle de la différentiation sous le signe $\int$ tombera nécessairement en défaut quand on voudra l'appliquer au cas où la quantité placée sous le signe sera infinie, indéterminée ou discontinue, ou même seulement au cas où sa dérivée serait infinie ou indéterminée. Ainsi, par exemple, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-\alpha}} = \frac{3}{2}(1-\alpha)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\alpha^{\frac{2}{3}}$$

a évidemment une dérivée par rapport à α. Si l'on voulait la

trouver en appliquant la règle donnée tout à l'heure, on aurait pour résultat l'intégrale

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-\alpha)^4}},$$

qui est infinie.

Lorsque la quantité placée sous le signe $\int$ devient infinie, il faut donc laisser de côté la règle démontrée plus haut; on pourra chercher à faire un changement de variable, ramenant l'intégrale à une autre ne renfermant plus d'éléments infinis; les limites de la nouvelle intégrale contiendront alors le plus souvent le paramètre par rapport auquel on doit différentier et l'on sera conduit au cas que nous allons étudier.

XIII. — Cas où les limites sont variables.

Lorsque les limites a, b de l'intégrale sont fonctions de t, il faut apporter quelques modifications aux conclusions précédentes; posons toujours

$$u = \int_a^b f(x, t)\,dx,$$

nous aurons, par le théorème des fonctions composées,

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{da}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{du}{db}\frac{\partial b}{\partial t}.$$

Dans cette formule $\frac{du}{dt}$ désigne la dérivée partielle de u relative à t, c'est-à-dire prise en laissant a et b constants; cette dérivée n'est autre que celle que nous avons appris à calculer tout à l'heure : ainsi l'on a ordinairement

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx;$$

on a ensuite

$$(3) \qquad \frac{du}{db} = f(b, t),$$

car la dérivée d'une intégrale prise par rapport à sa limite supérieure est la fonction placée sous le signe $\int$ dans laquelle on remplace la variable d'intégration par la limite supérieure, et, comme l'on a

$$u = \int_a^b f(x, t)\,dx = -\int_b^a f(x, t)\,dt,$$

on en déduit

$$(4) \qquad \frac{du}{da} = -f(a, t);$$

en vertu des formules (2), (3), (4), la formule (1) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + f(b, t)\frac{\partial b}{\partial t} - f(a, t)\frac{\partial a}{\partial t}.$$

C'est dans cette formule que consiste la règle de la différentiation sous le signe $\int$.

Première application. — On propose de différentier l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}}\,dx$$

par rapport à α; on posera $\sqrt{x} = z$ ou $x = z^2$, elle deviendra

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\cos \alpha z^2}{z}\,2z\,dz = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\cos \alpha z^2\,dz;$$

la dérivée par rapport à α est

$$-\int_0^{\sqrt{\pi}} 2z^2 \sin \alpha z^2\,dz = -\int_0^\pi \sqrt{x}\sin \alpha x\,dx.$$

Le résultat est le même que si l'on avait appliqué la règle de la différentiation sous le signe $\int$.

Deuxième application. — Différentier par rapport à α l'intégrale

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt[3]{x-\alpha}}\,dx.$$

On posera $\sqrt[3]{x-\alpha}=z$ et l'intégrale deviendra

$$\int_{-\sqrt[3]{\alpha}}^{\sqrt[3]{1-\alpha}} 3\,e^{\alpha(\alpha+z^3)}z\,dz;$$

rien ne s'oppose plus cette fois à l'application de la règle de la différentiation sous le signe $\int$; on trouve alors

$$\int_{-\sqrt[3]{\alpha}}^{\sqrt[3]{1-\alpha}} 3(2\alpha+z^3)\,z\,e^{\alpha(\alpha+z^3)}dz - \frac{e^{\alpha}}{\sqrt[3]{1-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}.$$

L'application directe de la règle de la différentiation sous le signe $\int$ à l'intégrale (1) aurait donné l'intégrale indéterminée.

$$\int_0^1 \frac{x\,e^{\alpha x}}{\sqrt[3]{x-\alpha}}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt[3]{(x-\alpha)^4}}\,dx.$$

XIV. — Intégration sous le signe $\int$.

Posons, comme tout à l'heure,

$$(1)\qquad u=\int_a^b f(x,t)\,dx;$$

je dis que l'on aura

$$(2)\qquad \int_\alpha^\beta u\,dt=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt.$$

En effet, différentions les deux membres de cette formule par rapport à β, nous aurons

$$(u)_\beta = \int_a^b f(x, \beta)\,dx,$$

$(u)_\beta$ désignant ce que devient u quand on y remplace t par β.

Les deux membres de la formule (2) ont donc la même dérivée relativement à β, car l'équation précédente est exacte, la formule (1) ayant lieu quel que soit t, et en particulier pour $t = \beta$; donc les deux membres de (2) ne peuvent différer que par un terme indépendant de β; ce terme est zéro, car pour $\beta = \alpha$ les deux membres de (2) sont nuls tous deux : ainsi la formule (2) est une conséquence de (1); elle peut d'ailleurs s'écrire

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, t)\,dx\,dt,$$

et l'on voit qu'il est permis d'intervertir l'ordre de deux intégrations successives.

Nous remarquerons toutefois que la formule précédente cesserait d'être exacte, si la fonction f cessait d'être finie ou bien déterminée entre les limites de l'intégration.

XV. — Application des règles précédentes.

1° On a

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1};$$

en intégrant par rapport à m, de μ à ν, il vient

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{\log x}\,dx = \log\frac{\mu+1}{\nu+1}.$$

L'intégrale indéfinie correspondante n'aurait pas pu se calculer.

2° On a

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}.$$

Si l'on différentie n fois de suite la formule (1), ce qui est permis, la dérivée seconde de la quantité intégrée restant finie, on a

$$\int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-ax}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n(-1)^n}{a^{n+1}}.$$

Si l'on fait alors $a = 1$ et si l'on divise par $(-1)^n$, on trouve

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = 1.2.3\ldots(n-1)n.$$

En intégrant de a à b la formule (1) par rapport à a, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}.$$

Cette formule se vérifie en la différentiant, ce qui est permis, la dérivée seconde de la quantité placée sous le signe $\int$ étant finie.

3° La formule

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}},$$

différentiée par rapport à α, donne

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \frac{\pi}{4}\alpha^{-\frac{3}{2}}.$$

4° L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ est finie; en effet, on peut l'écrire

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \ldots$$

ou bien, en remplaçant dans le second terme x par $x+\pi$, etc.,

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+\pi}\,dx + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+2\pi}\,dx - \ldots.$$

Cette suite forme une série à termes décroissants et alternativement positifs et négatifs. Le terme général $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n\pi}\,dx$ a pour limite zéro, car il peut s'écrire

$$\frac{1}{\xi+n\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\xi+n\pi},$$

ξ restant compris entre o et π. Cette quantité pour $n=\infty$ est nulle. La série en question, et par suite l'intégrale, a donc une valeur finie.

Ceci posé, on trouve, pour $a>0$,

$$\int e^{-ax}\sin x\,dx = -\frac{a\sin x+\cos x}{a^2+1}\,e^{-ax},$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{a^2+1};$$

en intégrant alors depuis $a=\varepsilon>0$ jusqu'à $a=\infty$, on a

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\varepsilon.$$

(L'intégration est permise, comme on peut le vérifier, en différentiant la formule obtenue après l'intégration et en observant que la dérivée seconde de la quantité sous le signe $\int$ est finie.)

Retranchons de part et d'autre $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, nous aurons

$$(1)\qquad \int_0^\infty (1-e^{-\varepsilon x})\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\varepsilon - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Cherchons la limite du premier membre de cette formule pour $\varepsilon=0$; écrivons-le ainsi

$$\int_0^\pi (1-e^{-\varepsilon x})\frac{\sin x}{x}\,dx + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \ldots$$

ou encore

$$\int_0^{\pi}(1-e^{-\varepsilon x})\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_0^{\pi}(1-e^{-\varepsilon x-\varepsilon\pi})\frac{\sin x}{x+\pi}\,dx$$
$$+\int_0^{\pi}(1-e^{-\varepsilon x-2\varepsilon\pi})\frac{\sin x}{x+2\pi}\,dx-\ldots.$$

Tous les termes de cette série sont décroissants, alternativement positifs et négatifs; cette série est donc convergente, et sa valeur est comprise entre son premier terme et la somme de ses deux premiers termes : cette valeur est donc zéro pour $\varepsilon=0$.

La formule (1) devient alors, pour $\varepsilon=0$,

$$\frac{\pi}{2}-\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=0;$$

donc

(2) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Quand on pose $x=\alpha z$, on trouve, en supposant $\alpha>0$,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha z}{z}\,dz=\frac{\pi}{2},$$

et cette intégrale ne dépend pas de α. Cependant, si l'on changeait α en $-\alpha$, on aurait

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(-\alpha)z\,dz}{z}\,dz=-\frac{\pi}{2},$$

ce dont on s'assure en changeant dans (2) x en $-\alpha z$ et en supposant toujours $\alpha>0$.

XVI. — Quelques intégrales obtenues par diverses méthodes.

1° Quand une fonction $f(x)$ est paire, c'est-à-dire quand

$$f(x)=f(-x),$$

on a

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

car

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx,$$

et si, dans la première intégrale qui figure au second membre, on change x en $-x$, on reproduit la seconde.

Ainsi nous avons trouvé tout à l'heure

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2};$$

il en résulte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \pi.$$

On a trouvé

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4};$$

il en résulte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2° Quand la fonction $f(x)$ est impaire, c'est-à-dire quand

$$f(x) = -f(-x),$$

on a

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0,$$

car tous les éléments de cette intégrale sont égaux deux à deux et de signes contraires. (La même démonstration que tout à l'heure réussirait aussi.)

Ainsi l'on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = 0, \qquad \int_{-a}^{+a} x^{(2m+1)}\,dx = 0, \qquad \ldots,$$

3° L'intégrale $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ représente le quart de l'aire du cercle de rayon a : sa valeur est donc $\frac{\pi}{4} a^2$.

4° Voici une intégrale qui joue un rôle important dans diverses branches des Mathématiques appliquées : on a

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour démontrer cette formule, posons

$$X = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

d'où

$$X e^{-y^2} = \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx;$$

posons

$$x = ty, \qquad dx = y\, dt,$$

nous aurons

$$X e^{-y^2} = \int_0^\infty e^{-(1+t^2)y^2}\, y\, dt.$$

Intégrons les deux membres de cette équation par rapport à y de $-\infty$ à $+\infty$ (et il est facile de voir que c'est permis), nous trouvons

$$X^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(e^{-(1+t^2)y^2} \frac{dt}{1+t^2} \right)_0^\infty$$

ou bien

$$X^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4};$$

on en conclut

$$X = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

5° Nous étudierons encore deux intégrales connues en Optique sous le nom d'*intégrales de Fresnel*.

Si dans la formule (1) on remplace x par $x\sqrt{a}$, on a

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx.$$

Multiplions les deux membres par $\cos a\,da$ et intégrons de 0 à ∞, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{da}{\sqrt{a}}\cos a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos a\,da\,dx,$$

de même

$$\int_0^\infty \frac{da}{\sqrt{a}}\sin a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin a\,da\,dx;$$

multiplions la seconde par $\sqrt{-1}$ et ajoutons, il viendra

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{a\sqrt{-1}}\,da}{\sqrt{a}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2+a\sqrt{-1}}\,da\,dx\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-\sqrt{-1}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{x^2\,dx}{x^4+1}+\sqrt{-1}\,\frac{dx}{x^4+1}\right).\end{aligned}$$

Or on a, en posant $x=\frac{1}{z}$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{z^2\,dz}{z^4+1};$$

donc

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{a\sqrt{-1}}\,da}{\sqrt{a}} = (1+\sqrt{-1})\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1};$$

Mais $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ est égal à $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; on a donc, en égalant à zéro les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,da}{\sqrt{a}} = \int_0^\infty \frac{\sin a\,da}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

si l'on fait $a = x^2$, il vient

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Nous retrouverons ces formules par une autre voie.

XVII. — Des intégrales des différents ordres.

L'intégrale ou l'*intégrale première* d'une fonction $f(x)$ est la fonction dont la dérivée est $f(x)$; de même nous appellerons *intégrale d'ordre* n d'une fonction $f(x)$ une fonction y, telle que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x);$$

en intégrant une, deux, trois, ..., n fois et en désignant par x_0, C_0, C_1, ..., C_{n-1} des constantes, on aura successivement

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^x f(x)\,dx + C_0,$$

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x)\,dx^2 + C_0 x + C_1,$$

..................................,

$$y = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \ldots f(x)\,dx^n$$
$$+ C_0 \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots n-1} + \ldots + C_{n-2}x + C_{n-1}.$$

Comme C_0, C_1, ... sont arbitraires, en appelant $\Pi(x)$ un polynôme arbitraire de degré $n-1$, on pourra écrire

$$(2) \qquad y = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} \cdots f(x)\,dx^n + \Pi(x).$$

La solution la plus générale de l'équation (1) renferme donc le polynôme $\Pi(x)$ arbitraire de degré n; *les diverses solutions de* (1) *ne pourront donc différer entre elles que par un polynôme arbitraire de degré $n-1$.*

Ceci posé, je dis que les intégrations successives qui concourent à former la solution y peuvent être remplacées par une seule. En effet, l'intégrale du premier ordre de $f(x)$ étant, en négligeant la constante,

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

celle du second ordre sera

$$\int_{x_0}^{x} dx \left[\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \right]$$

ou, en intégrant par parties et en négligeant les constantes,

$$(4) \qquad x\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx;$$

l'intégrale du troisième ordre sera

$$\int_{x_0}^{x} x \left[\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \right] dx - \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx$$

ou, en intégrant par parties et en négligeant toujours les constantes,

$$(5) \qquad \frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx - x\int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{x^2}{2} f(x)\,dx.$$

Les résultats (3), (4), (5) peuvent encore s'écrire

$$\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz,$$

$$x\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz - \int_{x_0}^{x} z f(z)\,dz$$

ou

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x-z}{1} f(z)\,dz,$$

$$\frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz - x\int_{x_0}^{x} z f(z)\,dz + \int_{x_0}^{x} \frac{z^2}{2} f(z)\,dz$$

ou

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)\,dz.$$

On soupçonne pour l'intégrale d'ordre n la formule

$$(6) \qquad y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz.$$

Nous allons vérifier que cette fonction y : 1° a pour dérivée $n^{\text{ième}}$ $f(x)$ et en est une intégrale d'ordre n; 2° qu'elle s'annule, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, pour $x = x_0$.

Effectivement, on tire de (6), en appliquant les règles de la différentiation sous le signe $\int$,

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} f(z)\,dz + \left[\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x)\right]_{z=x};$$

mais le terme dans lequel on doit faire $z = x$ est nul : on a donc simplement

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} f(z)\,dz,$$

puis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)} f(z)\,dz,$$

. . . . ;

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} (x-z)^0 f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz.$$

Les $n-1$ premières dérivées de y sont donc nulles pour $x=x_0$ et, en différentiant encore, il vient

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x).$$

La formule (6) donne donc bien une solution de l'équation (1), et la solution la plus générale de cette équation sera, en appelant $\Pi(x)$ un polynôme arbitraire d'ordre $n-1$,

$$(7)\qquad y=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f(z)\,dz+\Pi(x).$$

Une intégrale d'ordre n se calcule donc au moyen d'une intégration unique.

XVIII. — Formule de Taylor.

On peut déduire de la théorie exposée au paragraphe précédent la formule de Taylor, avec une nouvelle forme du reste.

En effet, d'après ce que l'on a vu, la solution la plus générale y de

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x)$$

est

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz+\Pi(x),$$

et, en désignant par $f^n(x)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$, la solution la plus générale de

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}=f^n(x)$$

sera

$$(2)\qquad y=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^n(z)\,dz+\Pi(x).$$

Or $f(x)$ est une solution de (1); on aura donc

$$(3) \qquad f(x) = \Pi(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^n(z)\,dz,$$

$\Pi(x)$ devant avoir une forme convenable. Pour déterminer la forme de $\Pi(x)$, nous observerons que l'intégrale qui figure dans l'équation précédente est nulle, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, pour $x = x_0$; par suite $f(x) - \Pi(x)$, qui lui est égal, devra être nul, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, pour $x = x_0$; donc

$$\begin{aligned} f(x_0) - \Pi(x_0) &= 0, \\ f'(x_0) - \Pi'(x_0) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ f^{n-1}(x_0) - \Pi^{n-1}(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

$\Pi(x)$ est alors connu, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, pour $x = x_0$, et par suite

$$\Pi(x) = \Pi(x_0) + \frac{x-x_0}{1} \Pi'(x_0) + \ldots$$

ou bien

$$\Pi(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1} f^{n-1}(x_0).$$

(3) devient alors

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1} f^{n-1}(x_0)$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^n(z)\,dz.$$

C'est la formule de Taylor, dans laquelle le reste a pris la forme

$$R = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^n(z)\,dz.$$

On peut, parmi une infinité d'autres, retrouver la forme ordi-

naire du reste; écrivons, par exemple, cette formule ainsi

$$R = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}\psi'(z) f^n(z)\,dz}{1.2.3\ldots(n-1)\psi'(z)};$$

supposons f^n et ψ' continues et ψ' croissant ou décroissant entre les limites x_0 et x : on pourra écrire, en appelant ζ une valeur comprise entre x_0 et x,

$$R = \frac{f^n(\zeta)}{\psi'(\zeta)} \frac{(x-\zeta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_{x_0}^{x} \psi'(z)\,dz$$

ou bien

$$R = \frac{f^n(\zeta)(x-\zeta)^{n-1}}{\psi'(\zeta).1.2.3\ldots(n-1)} [\psi(x)-\psi(x_0)];$$

soit $\psi(x) = (x-z)^n$, on aura

$$R = \frac{f^n(\zeta)}{1.2.3\ldots n}(x-x_0)^n.$$

C'est la forme ordinaire du reste.

EXERCICES ET NOTES.

1. On a, pour $b < a$,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Intégrer et différentier par rapport à a et à b.

2. On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha}}.$$

Différentier par rapport à α.

3. Démontrer la formule

$$\int_0^\pi \log(1-2\alpha x+\alpha^2)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1, \\ 2\pi\log\alpha & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$$

en observant que le premier membre est égal à

$$\lim \sum_{i=0}^{i=n} \log\left(1 - 2\alpha\cos\frac{i\pi}{n} + \alpha^2\right)\frac{\pi}{n}.$$

(Indiqué par DELAUNAY.)

4. Démontrer, en s'appuyant sur l'expression de l'aire de l'ellipse, que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - e\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Différentier plusieurs fois de suite par rapport à e.

5. Prouver que

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2,$$

en posant $x = \operatorname{tang}\varphi$.

(SERRET, *Journal de Liouville*, t. IX.)

6. Réduire à une intégrale simple l'expression

$$\int_{x_0}^{x} x\,dx \int_{x_0}^{x} x\,dx \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} x\,\varphi(x)\,dx.$$

7. L'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

a une valeur finie.

8. L'intégrale

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^a dx$$

a-t-elle pour des valeurs de a convenablement choisies une valeur réelle et finie?

9. Trouver la limite de

$$\int_0^m \cos^m \frac{x}{\sqrt{m}}\,dx, \qquad \text{pour} \qquad m = \infty.$$

10. Il existe une grosse Table de presque toutes les intégrales définies connues, par Bierens de Haan.

11. On démontre facilement que

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\, 1.3.5\ldots(2n-1)\, \frac{\sin n \arccos x}{n}.$$

Alors, au moyen de l'intégration par parties, on a

$$\int_{-1}^{+1} \varphi^n(z)(1-z^2)^{\frac{2n-1}{2}}\, dz = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \varphi(z)\, \frac{d^n(1-z^2)^{\frac{2n-1}{2}}}{dz^n}\, dz$$

et, si l'on fait $z = \cos x$, on a

$$\int_0^{\pi} \varphi^n(\cos x) \sin^{2n} x\, dx = 1.3.5\ldots(2n-1) \int_0^{\pi} \varphi(\cos x) \cos n x\, dx.$$

(Jacobi, *Crelle,* t. 15; Liouville, *J. de Math.,* 1re série, t. I.)

CHAPITRE IV.

SUR LES INTÉGRALES MULTIPLES.

I. — Définitions.

Considérons un système de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut les assujettir à prendre certaines valeurs simultanées; l'ensemble des valeurs simultanées que ces variables pourront prendre sera ce que l'on appellera un *domaine*.

Un domaine pourra être fourni par un ensemble d'inégalités, telles que

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1, \qquad \ldots.$$

Par exemple, si x et y sont les coordonnées rectangulaires d'un point assujetti à rester dans un cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre, le *domaine* des variables x et y sera défini par l'inégalité

$$x^2 + y^2 < R^2.$$

Si le point (x, y) est assujetti à rester dans un rectangle dont les sommets ont pour coordonnées (x_0, y_0), $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0, y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0 + k)$, le *domaine* des variables x, y sera fourni par les inégalités

$$x_0 < x < x_0 + h, \qquad y_0 < y < y_0 + k.$$

On appelle *intégrale multiple* de la fonction de plusieurs variables $f(x, y, z)$, prise relativement à un domaine donné D, la somme des valeurs que peut prendre l'expression

$$(1) \qquad \sum f(x + \lambda\, \Delta x,\ y + \mu\, \Delta y,\ z + \nu\, \Delta z)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z,$$

quand x, y, z varient dans le domaine donné D, Δx, Δy, Δz prenant des valeurs qui tendent vers zéro et λ, μ, ν désignant des quantités arbitraires comprises entre o et 1.

Une pareille définition a besoin d'être justifiée en établissant que l'expression (1) a une limite, toujours la même, quels que soient λ, μ, ν (compris entre o et 1) et quel que soit le mode d'insertion des quantités x, y, z dans le domaine D, pourvu que leur nombre soit infini et que x, y, z ne passent jamais d'un système de valeurs à un autre, qui diffèrent de celles-ci de quantités finies. Pour établir cette proposition, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme. — *Si la quantité ε tend vers o d'une manière quelconque, l'intégrale $\int_a^b \varepsilon\, dx$ aura aussi pour limite zéro.*

En effet, soit E la plus grande valeur absolue de ε, quand x varie de a à b; comme l'intégrale $\int_a^b \varepsilon\, dx$ est la limite de $\Sigma\varepsilon\,\Delta x$, on aura toujours

$$\Sigma\varepsilon\,\Delta x < \Sigma \mathrm{E}\,\Delta x \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}\,\Sigma\,\Delta x.$$

Or

$$\Sigma\,\Delta x = b - a;$$

donc

$$\Sigma\varepsilon\,\Delta x < \mathrm{E}(b - a).$$

Si donc ε tend vers zéro, il en sera de même de E, et l'intégrale proposée aura aussi pour limite zéro.

Cela posé, donnons à z et à y des valeurs bien déterminées; x, y, z restant dans le domaine D, x va varier entre des limites bien déterminées, fonctions de y et z, que nous supposerons au nombre de deux pour fixer les idées, et qui seront racines de $\Theta = 0$ si, par exemple, le domaine D est donné par la formule $\Theta < 0$. Soient $\varphi_0(y, z)$ et $\varphi_1(y, z)$ ces limites, on aura

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(x, y, z)\, dx = \lim \sum f(x + \lambda\,\Delta x, y, z)\,\Delta x$$

ou, en appelant ε un infiniment petit,

$$(2) \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f\,dx = \sum f(x + \lambda\,\Delta x,\ y,\ z)\,\Delta x + \varepsilon.$$

(Si l'inégalité $\Theta < 0$ imposait à x l'obligation de varier entre φ_0 et φ_1, φ_2 et φ_3, par exemple, le premier membre de cette formule se composerait de deux intégrales au lieu d'une, et il faudrait y ajouter $\int_{\varphi_2}^{\varphi_3} f\,dz$.) Multiplions les deux membres de (2) par dy et intégrons entre des limites qui soient la plus grande et la plus petite des valeurs [1] que puisse prendre y, quand x reste constant dans l'inégalité

$$\Theta(x,\ y,\ z) > 0;$$

les limites de y seront certaines fonctions de x, ψ_0 et ψ_1, peut-être difficiles à déterminer, mais qui ont une existence réelle. Nous aurons alors

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} dy \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(x,\ y,\ z)\,dx$$
$$= \int_{\psi_0}^{\psi_1} \sum f(x + \lambda\,\Delta x,\ y,\ z)\,dy\,\Delta x + \int_{\psi_0}^{\psi_1} \varepsilon\,dy$$

ou bien

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} dy \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(x, y, z)\,dx = \sum f(x + \lambda\,\Delta x, y + \mu\,\Delta y, z)\,\Delta x\,\Delta y + \alpha,$$

α désignant une quantité infiniment petite, puisque, en vertu de notre lemme, $\int_{\psi_0}^{\psi_1} \varepsilon\,dy$ est infiniment petit. En multipliant par dz et en intégrant entre deux limites qui seront le maximum et le minimum de z, pour

$$\Theta(x,\ y,\ z) > 0,$$

---

[1] Ou plus généralement entre des limites qui soient les maxima et les minima successifs de y.

on trouvera, en appelant a et b ces limites,

$$\int_a^b dz \int_{\psi_0}^{\psi_1} dy \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(x, y, z)\, dx = \sum f(x + \lambda\, \Delta x, y + \mu\, \Delta y, z + \nu\, \Delta z)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z,$$

à un infiniment petit près. L'expression (2) a donc une limite. Nous écrirons cette limite sous la forme abrégée.

$$(3) \qquad \int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Il est clair que la valeur d'une intégrale multiple pourra prendre des formes différentes, suivant que l'on commencera l'intégration par rapport à l'une ou à l'autre des variables, mais les résultats numériques obtenus devront coïncider.

Nous éclaircirons ces notions, un peu abstraites, au moyen d'une application :

Supposons qu'il s'agisse de calculer le volume de la sphère ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Menons une série de plans parallèles aux plans de coordonnées et infiniment voisins : ils décomposeront le volume de la sphère en une infinité de petits parallélépipèdes de dimensions $dx\, dy\, dz$; la somme des volumes de ces parallélépipèdes $\Sigma\, dx\, dy\, dz$ pour toutes les valeurs de x, y, z, telles que

$$(A) \qquad x^2 + y^2 + z^2 < R^2,$$

aura pour limite le volume de la sphère ; en vertu des définitions données tout à l'heure, on voit que le volume de la sphère sera l'intégrale

$$\int\int\int dx\, dy\, dz,$$

le domaine des variables x, y, z étant défini par la formule (A), ou, comme l'on dit encore, le point x, y, z restant assujetti à demeurer à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Une première sommation, effectuée en laissant y et z constants, sera faite par rapport à x

$$\text{de} \quad -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \quad \text{à} \quad +\sqrt{R^2 - y^2 - z^2},$$

et donnera

$$\int dx \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{R^2 - y^2 - z^2};$$

il faudra ensuite calculer l'intégrale

$$\int 2\,dy\sqrt{R^2 - y^2 - z^2},$$

en faisant varier y entre des limites fournies par le maximum et le minimum de y donnés par

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

où z sera supposé constant; ce maximum et ce minimum ont lieu pour $x = 0$, et l'on a

$$y = \pm\sqrt{R^2 - z^2}.$$

Posant donc $\sqrt{R^2 - z^2} = a$, il faudra évaluer

$$\int_{-a}^{+a} 2\,dy\sqrt{a^2 - y^2},$$

ce qui donne πa^2 ou $\pi(R^2 - z^2)$. Cette dernière quantité devra être intégrée entre les valeurs qui rendent z, tiré de

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

maximum ou minimum; ces valeurs sont $z = \pm R$ et le volume total de la sphère sera

$$\int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2)\,dz = 2\pi R^3 - 2\pi\frac{R^3}{3} = 4\pi\frac{R^3}{3}.$$

Au fond, à quoi reviennent ces opérations? Intégrer en laissant y et z constants, c'est évaluer le volume d'un prisme mixtiligne de section droite $dy\,dz$, et de hauteur

$$x = 2\sqrt{R^2 - y^2 - z^2};$$

ce volume évalué, l'intégrer en laissant z constant, c'est calculer le volume d'une tranche sphérique comprise entre

deux plans d'ordonnées z et $z+dz$ parallèles au plan des xy; enfin intégrer par rapport à z, c'est faire la somme de toutes ces tranches.

II. — Du changement de variable dans les intégrales multiples.

Le changement de variable dans une intégrale multiple est une opération délicate, et il n'est pas rare de rencontrer des personnes qui commettent sur ce point des fautes d'inattention; il est inutile de citer les Mémoires qui contiennent ces fautes, qu'il est d'ailleurs facile d'éviter une fois que l'on est prévenu.

Si, par exemple, dans l'intégrale

$$u = \int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

on voulait aux variables x, y, z substituer les variables ξ, η, ζ, liées à celles-ci par des équations de la forme

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \chi(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \psi(\xi, \eta, \zeta),$$

il faudrait se garder d'écrire la formule inexacte

$$u = \int\int\int f(\varphi, \chi, \psi)\varphi'\chi'\psi'\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

non plus que

$$u = \int\int\int f(\varphi, \chi, \psi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\, d\xi + \ldots\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\, d\xi \ldots\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\, d\xi \ldots\right).$$

On commettrait ainsi des erreurs graves : c'est ce qui va ressortir de la théorie que nous allons développer. Pour obtenir u, il faut d'abord intégrer par rapport à x, en laissant y et z constants. Laissons donc dans les formules (1) y et z constants, nous aurons

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\, d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\, d\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\, d\zeta,$$

$$0 = \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\, d\xi + \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\, d\eta + \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\, d\zeta,$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\, d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\, d\eta + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\, d\zeta;$$

d'où nous tirons

$$d\xi = dx\,\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(\eta,\zeta)} : \frac{\partial(\varphi,\chi,\psi)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}$$

ou

$$(2) \qquad dx = d\xi\,\frac{\partial(\varphi,\chi,\psi)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} : \frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(\eta,\zeta)}.$$

On pourra alors substituer à la variable x la variable ξ, et intégrer par rapport à ξ, au lieu d'intégrer par rapport à x; mais η et ζ devront être censés exprimés en y, z et ξ, et l'on devra prendre pour limite de la nouvelle intégration certaines fonctions de y et z qui dépendront de la manière dont varie ξ, quand x varie entre les limites primitives.

Avant d'aller plus loin, intervertissons l'ordre des intégrations et écrivons u comme il suit

$$u = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial(\varphi,\chi,\psi)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} : \frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(\eta,\zeta)}\, f\,dy\,dz\,d\xi;$$

nous n'altérons pas ainsi la valeur de l'intégrale, mais il est évident que les limites des intégrations ne seront plus les mêmes et qu'elles devront être choisies de telle sorte que l'intégrale soit toujours composée des mêmes éléments.

Substituons maintenant η à y, l'intégration par rapport à y devra être effectuée en laissant ξ constant et z constant; dy sera donc donné par les formules

$$dy = \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\zeta,$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\,d\zeta;$$

d'où l'on tire

$$dy = d\eta\,\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(\eta,\zeta)} : \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}.$$

On a donc

$$u = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{z_0}^{z_1} f\,\frac{\partial(\varphi,\chi,\psi)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} : \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\,dz\,d\xi\,d\eta;$$

en remplaçant dz par sa nouvelle valeur $\frac{d\psi}{d\zeta}d\zeta$, prise en laissant ξ et η constants, on aura enfin

$$u = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} f\frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Ainsi, pour effectuer le changement de variable, il suffira de remplacer x, y, z par leurs valeurs dans f, et $dx\,dy\,dz$ par $\frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}d\xi\,d\eta\,d\zeta$ ou, si l'on veut, par $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}d\xi\,d\eta\,d\zeta$. Il est clair que la démonstration donnée pour le cas de trois variables s'étend à un nombre quelconque de variables.

Ainsi, *pour changer de variable dans l'intégrale multiple*

$$\iint\ldots f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n$$

et substituer aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *des variables* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *liées à celles-ci par* n *équations, il faudra dans* f *remplacer* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par leurs valeurs exprimées en* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *et remplacer* (¹) $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, par

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\,dy_1\,dy_2\,\ldots\,dy_n.$$

Il faudra ensuite déterminer le domaine des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Le domaine des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera généralement donné par des inégalités, dans lesquelles il faudra opérer le changement de variables; elles se transformeront alors dans de nouvelles inégalités entre les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui serviront à déterminer le nouveau domaine.

(¹) Cette règle résulte aussi d'un théorème de Jacobi démontré tome I, p. 170.

III. — Différentiation des intégrales multiples.

La règle de la différentiation sous le signe $\int$ peut être généralisée et s'appliquer aux intégrales multiples. Considérons, par exemple, l'intégrale triple

$$(1)\qquad u = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z, \alpha)\, dx\, dy\, dz,$$

où α est un paramètre par rapport auquel on doit différentier. Nous ferons usage de la notation

$$\Big|^{x_0} \mathrm{F}(x)$$

pour exprimer que dans $\mathrm{F}(x)$ on doit remplacer x par x_0; ainsi, si l'on a $\mathrm{F}(x)=y$, $\mathrm{F}(x_0)=y_0$, nous écrirons

$$\Big|^{x_0} y = y_0 \quad \text{ou} \quad \Big|^{x=x_0} y = y_0,$$

et nous lirons *substitution* x_0 dans y égale y_0. De même nous représenterons par

$$\Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x)$$

la différence $\Big|^{x_1}\mathrm{F}(x) - \Big|^{x_0}\mathrm{F}(x)$ ou $\mathrm{F}(x_1) - \mathrm{F}(x_0)$; ainsi

$$\Big|_{x_0}^{x_1} y = y_1 - y_0$$

se lira *substitution* de x_0 à x_1 dans y égale $y_1 - y_0$. Avec cette notation imaginée par Sarrus et simplifiée par Cauchy,

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}'(x)\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x),$$

le théorème de l'intégration par parties prend la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} u\frac{dv}{dx}\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1} uv - \int_{x_0}^{x_1} v\frac{du}{dx}\,dx.$$

Revenons à la formule (1). Mais considérons d'abord l'intégrale simple

$$u = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx;$$

d'après la règle de la différentiation sous le signe $\int$, on a

$$\frac{du}{d\alpha} = f(x_1,\alpha)\frac{dx_1}{d\alpha} - f(x_0,\alpha)\frac{dx_0}{d\alpha} + \int_{x_0}^{x_1} f'\,dx,$$

en désignant par f' la dérivée $\frac{df}{d\alpha}$; cette équation, avec la notation de Cauchy, s'écrit

$$\frac{du}{d\alpha} = \Big|_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\frac{dx}{d\alpha} + \int_{x_0}^{x_1} f'\,dx,$$

ce qui est plus simple. Si nous appliquons cette formule à l'intégrale (1), il vient

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\alpha} = {} & \Big|_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f(x,y,z,\alpha)\frac{dx}{d\alpha}\,dy\,dz \\ & + \int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{d\alpha}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f\,dx\,dy\,dz;\end{aligned}$$

en appliquant de nouveau la règle, on a

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\alpha} = {} & \Big|_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f\frac{dx}{d\alpha}\,dy\,dz \\ & + \int_{x_0}^{x_1}\Big|_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f\frac{dy}{d\alpha}\,dx\,dz \\ & + \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{d\alpha}\int_{z_0}^{z_1} f\,dx\,dy\,dz\end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f \frac{dx}{d\alpha} dy\, dz$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f \frac{dy}{d\alpha} dx\, dz$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f \frac{dz}{d\alpha} dx\, dy$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f'\, dx\, dy\, dz.$$

Cette formule, dont la loi est évidente, s'applique à un nombre quelconque de variables. Lorsque les limites des intégrations sont indépendantes de α, on a simplement

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f'\, dx\, dy\, dz.$$

Cette dernière formule, que l'on aurait pu démontrer directement, est la plus utile, néanmoins la précédente est d'un usage continuel dans le calcul des variations.

IV. — Application à l'évaluation des volumes.

Lorsque l'on donne l'équation d'une surface sous la forme

$$z = \varphi(x, y),$$

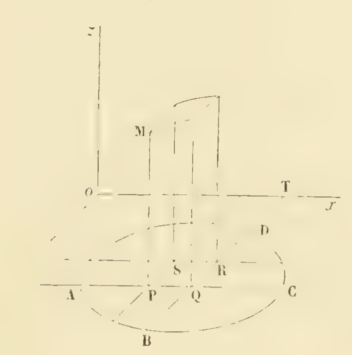
il est facile d'évaluer, au moyen d'une intégrale double, le volume compris entre cette surface, le plan des xy et quatre plans dont deux sont parallèles au plan des xz et deux autres au plan des yz; plus généralement, d'évaluer le volume compris entre cette surface, le plan des xy et une surface cylindrique ayant pour base, sur le plan des xy, une courbe donnée ABCD par son équation

$$\psi(x, y) = 0,$$

et pour génératrices des parallèles à l'axe des z.

Supposons, pour fixer les idées, les coordonnées rectangulaires; le volume cherché est la somme de volumes partiels, tels que celui qui est représenté dans la *fig.* 6; ces volumes sont

Fig. 6.



limités à leur partie inférieure par un rectangle PQRS ayant ses dimensions parallèles à Ox et Oy égales à dx, dy respectivement, et situé dans le plan des xy. Par les côtés du rectangle PQRS, on a fait passer des plans perpendiculaires au plan des xy et la surface prismatique résultante se trouve limitée par la surface $z = \varphi(x, y)$ qui termine le petit volume en question; ce petit volume a pour mesure

$$\zeta\, dx\, dy,$$

ζ désignant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite valeur que prend z ou $\varphi(x, y)$ quand le point x, y se meut à l'intérieur du rectangle PQRS, en sorte que le volume cherché, en appelant θ et θ' des quantités comprises entre o et 1 a pour expression

$$\sum \varphi(x + \theta\, dx,\ y + \theta' dy)\, dx\, dy$$

ou, par définition, l'intégrale double

$$\iint \varphi(x, y)\, dx\, dy \quad \text{ou} \quad \iint z\, dx\, dy.$$

Cette intégrale devra être prise, par exemple, par rapport à y entre des limites $\theta_0(x)$ et $\theta_1(x)$, en appelant $\theta_0(x)$ et $\theta_1(x)$ les valeurs TD et TB de y obtenus en résolvant l'équation

$$\psi(x, y) = 0,$$

dont nous supposerons les racines réelles au nombre de deux; puis, l'intégration étant effectuée par rapport à y, on l'effectuera par rapport à x depuis la plus petite, jusqu'à la plus grande valeur que peut prendre cette variable. Ces deux limites seront les distances des tangentes à la courbe $\psi(x, y) = 0$ parallèles à l'axe des y à cet axe, ces tangentes étant supposées au nombre de deux seulement, comme dans le cas de la figure.

Dans ce qui va suivre, nous aurons souvent l'occasion de répéter des raisonnements analogues à celui que nous venons de faire : nous les présenterons d'une façon abrégée. Pour donner un exemple de la manière dont nous procéderons dorénavant, nous allons reprendre celui que nous venons de développer et nous dirons : *Le volume à évaluer est la somme de volumes tels que $z\,dx\,dy$ et, par suite, le volume total est*

$$\int\int z\,dx\,dy,$$

sans faire remarquer que ce volume est en réalité

$$\lim \sum \varphi(x + \theta\,dx, y + \theta'\,dy)\,dx\,dy.$$

Nos raisonnements ne seront pas ainsi aussi rigoureux dans la forme, mais ils le seront dans le fond, ce qui est bien suffisant.

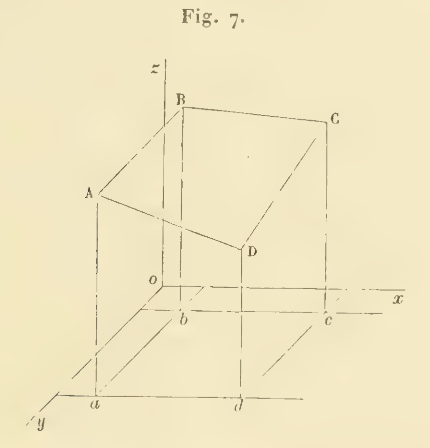
Voici une application de la théorie précédente, qui a une grande importance, et qui permet d'effectuer simplement le cubage des déblais et des remblais (*fig.* 7).

Nous supposerons la surface $z = \varphi(x, y)$ engendrée par une droite qui reste parallèle au plan des zy, et qui s'appuie sur deux droites BC et AD, parallèles au plan des zx; cette

surface, comme l'on voit, sera celle d'un paraboloïde hyperbolique.

Soient AB et CD deux des génératrices de ce paraboloïde;

Fig. 7.



proposons-nous d'évaluer le volume prismatique ABCD$abcd$, a, b, c, d désignant les projections de A, B, C, D.

Soient

$$\mathrm{A}a = \alpha, \quad \mathrm{B}b = \beta, \quad \mathrm{C}c = \gamma, \quad \mathrm{D}d = \delta, \quad bc = p, \quad ba = q;$$

cherchons l'équation de la surface, et, pour plus de simplicité, transportons l'origine en b.

Les équations des directrices sont

$$\mathrm{BC} \begin{cases} y = 0, \\ x(\beta - \gamma) + pz - p\beta = 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{AD} \begin{cases} y = q, \\ x(\alpha - \delta) + pz - p\alpha = 0. \end{cases}$$

Coupons la figure par le plan $x = h$, les intersections avec BC et AD auront pour coordonnées

$$h,\ 0,\ \beta - h\frac{\beta - \gamma}{p} \quad \text{et} \quad h,\ q,\ \alpha - h\frac{\alpha - \delta}{p};$$

les équations de la droite génératrice seront donc

$$y\left[\beta-\alpha+\frac{h}{p}(\alpha-\delta+\gamma-\beta)\right]+qz-q\beta+qh\,\frac{\beta-\gamma}{p}=0,$$

$$x=h;$$

l'élimination de h donne l'équation de la surface

$$z=\frac{xy}{pq}(\delta+\beta-\alpha-\gamma)+\frac{y}{q}(\alpha-\beta)+\frac{x}{p}(\gamma-\beta)+\beta.$$

Intégrant alors en laissant y constant de 0 à p, on a

$$\frac{p}{2q}y(\delta+\beta-\alpha-\gamma)+\frac{py}{q}(\alpha-\beta)+\frac{p}{2}(\gamma-\beta)+\beta p;$$

intégrant ce résultat par rapport à y de 0 à q, on trouve enfin

$$\frac{pq}{4}(\delta+\beta-\alpha-\gamma)+\frac{pq}{2}(\alpha-\beta)+\frac{pq}{2}(\gamma-\beta)+\beta pq,$$

c'est-à-dire, réductions faites,

$$pq\,\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}.$$

pq est l'aire de la base $abcd$; donc la mesure du solide considéré est le produit de sa section droite par la moyenne de ses arêtes.

V. — Volumes en coordonnées obliques.

Dans le cas où les axes sont obliques, il convient de modifier un peu l'expression de la mesure des volumes. En effet, le volume élémentaire n'est plus $z\,dy\,dx$; car, si l'on décompose le volume à évaluer en prismes ayant leurs arêtes parallèles aux axes, la mesure d'un quelconque de ces prismes sera $\varepsilon z\,dx\,dy$, ε désignant le sinus de l'angle trièdre des axes ou, si l'on veut,

$$\begin{aligned}\varepsilon^2=1-\cos^2(y,z)-\cos^2(z,x)\\-\cos^2(x,y)+2\cos(z,y)\cos(x,z)\cos(x,y);\end{aligned}$$

le volume total sera alors

$$\varepsilon \int\int z\, dy\, dx.$$

Appliquons cette formule à l'ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

d'où

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Intégrons par rapport à x entre les limites

$$0 \quad \text{et} \quad a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

ce qui revient à faire la somme des éléments contenus dans une tranche parallèle au plan des zy; en observant que (p. 136)

$$\int_0^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} R^2,$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx &= \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{c}{a}\sqrt{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - x^2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4}\,\frac{c}{a}\, a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\, ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).
\end{aligned}$$

Il reste à intégrer par rapport à y entre les limites 0 et b, ce qui revient à faire la somme des tranches analogues à celle que nous venons d'évaluer et à multiplier le résultat par ε: on a alors la huitième partie du volume de l'ellipsoïde

$$\varepsilon\,\frac{\pi}{4}\, ac\left(b - \frac{b^3}{3b^2}\right) = \frac{\varepsilon\pi abc}{6};$$

le volume total est donc

$$\frac{4\pi}{3}\varepsilon abc.$$

Le produit εabc des diamètres conjugués par le sinus de leur angle trièdre est donc constant ou, si l'on veut, le parallélépipède construit sur ces diamètres est constant et mesuré par le produit des axes.

VI. — Emploi des coordonnées polaires.

Si, dans l'intégrale $\int\int\int dx\,dy\,dz$ qui représente le volume d'un corps, on veut changer de variables, prendre des coordonnées polaires et poser

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta,$$

on aura (p. 151)

$$\int\int\int dx\,dy\,dz = \int\int\int \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Calculons le déterminant qui entre dans le second membre; nous trouverons

$$r^2 \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

et, par suite,

$$\int\int\int dx\,dy\,dz = \int\int\int r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Nous laissons au lecteur le soin de prouver que $r^2 dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ est l'élément de volume compris : 1° entre deux sphères décrites de l'origine comme centre avec des rayons r et $r+dr$; 2° entre deux plans passant par l'axe des z et faisant entre eux l'angle $d\varphi$; 3° enfin entre deux surfaces coniques ayant leur sommet à l'origine et dont les génératrices font avec l'axe des z les angles θ et $\theta + d\theta$. Les arêtes du solide élé-

mentaire ainsi formé, qui peut être assimilé à un parallélépipède rectangle, sont dr, $r\,d\theta$, $r\sin\theta\,d\varphi$.

La recherche des volumes par les coordonnées polaires ne conduit guère qu'à des résultats connus ou plus faciles à trouver par d'autres méthodes; mais l'élément du volume $r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ joue un rôle important dans un grand nombre de questions de Mécanique, et il était important d'en donner l'expression.

VII. — Volumes trouvés par des méthodes diverses.

Volume du cone. — En décomposant la base du cône en une série d'éléments rectangulaires et en prenant ces éléments pour base des pyramides ayant pour sommet le sommet du cône, on décomposera celui-ci en une somme de pyramides ayant pour mesure $dx\,dy\,\frac{1}{3}h$, h désignant la hauteur du cône; alors

$$\frac{1}{3}h\int\int dx\,dy$$

sera le volume cherché. Or $\int\int dx\,dy$ est la base du cône, donc le volume du cône a pour mesure le produit de sa base par le tiers de la hauteur.

Volume du conoide. — Considérons un conoïde engendré

Fig. 8.

z
A C
B
z'

par une droite normale à zz' (*fig.* 8) qui s'appuie sur une courbe plane dont le plan est parallèle à $z'z$; essayons d'évaluer le volume compris entre zz' et la courbe donnée.

A cet effet, détachons du volume une tranche ABC, à l'aide de deux plans normaux à zz' et infiniment voisins, le volume de cette tranche est ABC dz, où dz désigne sa hauteur. Le volume total cherché sera donc

$$\int \mathrm{ABC}\, dz$$

ou, appelant h la distance du plan de la courbe à l'axe zz',

$$\int \frac{1}{2} h\,\mathrm{BC}\, dz = \frac{1}{2} h \int \mathrm{BC}\, dz.$$

Supposons, par exemple, que la courbe soit une ellipse : on pourra écrire, en désignant BC par $2x$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2};$$

le volume cherché sera alors

$$\frac{ah}{c}\int_{-c}^{+c} \sqrt{c^2 - z^2}\, dz = \frac{\pi a c h}{2}.$$

L'intégrale $\int \mathrm{BC}\, dz$ est d'ailleurs l'aire de la directrice; on peut donc dire que le volume cherché est égal au produit de la surface directrice par la moitié de sa distance à l'axe.

Cubature d'un volume de révolution. — Décomposons ce volume en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à l'axe de hauteur dz; soit, en général, x le rayon du parallèle suivant lequel un plan sécant coupe la surface. L'aire de ce parallèle sera πx^2, et le volume de la tranche qui lui sert de base sera celui d'un cylindre de base πx^2 et de hauteur dz, c'est-à-dire $\pi x^2 dz$; telle est la différentielle du volume cherché; le volume lui-même sera donc

$$\pi \int x^2\, dz.$$

La relation qui lie x à z est l'équation en x et z du méridien.

Si, par exemple, le méridien est la parabole

$$x^2 = 2pz,$$

le volume d'un segment parabolique de hauteur h sera

$$2\pi p \int_0^h z\,dz = p\pi h^2$$

ou, en observant que $h = \frac{x^2}{2p}$, x désignant le rayon de la base du segment,

$$\pi h \frac{x^2}{2};$$

c'est la moitié du cylindre de même base et de même hauteur.

Nous ferons encore connaître l'expression du volume d'un segment d'ellipsoïde de révolution, parce que le volume d'un tonneau peut lui être assimilé, et l'on obtient ainsi une formule très simple pour le cubage des tonneaux. Supposons que le méridien de l'ellipsoïde ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

l'intégrale à évaluer est

$$\pi \int x^2\,dz$$

ou bien

$$\pi \int_0^h \frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2)\,dz,$$

si l'on veut le segment compris entre le plus grand parallèle et le parallèle à la distance h de celui-ci.

Cette intégrale a pour valeur

$$\pi\left(a^2 h - \frac{a^2 h^3}{3c^2}\right);$$

en doublant, on aura le volume d'un tonneau de hauteur $2h$, à savoir

$$2\pi\left(a^2 h - \frac{a^2 h^3}{3c^2}\right).$$

On donne ordinairement les rayons de base, et non c; or, appelant R le rayon de base, on a

$$\frac{R^2}{a^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad c^2 = \frac{a^2 h^2}{a^2 - R^2},$$

et, par suite, le volume du tonneau devient

$$2\pi\left[a^2 h - \frac{1}{3}\frac{(a^2 - R^2)a^2 h^3}{a^2 h^2}\right] = \frac{2\pi h}{3}(2a^2 + R^2)$$

ou, appelant H la hauteur totale,

$$\frac{H\pi}{3}(2a^2 + R^2).$$

Considérons enfin le volume engendré par la cycloïde

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u),$$

tournant autour de sa base. Nous supposerons la cycloïde limitée à deux rebroussements consécutifs. Le volume aura pour expression

$$\begin{aligned}
\pi \int_0^{2\pi} y^2\,dx &= \pi \int_0^{2\pi} a^3(1 - \cos u)^3\,du \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos u + 3\cos^2 u - \cos^3 u)\,du \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + 3\cos^2 u)\,du \\
&= 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}$$

VIII. — Sur la mesure des surfaces courbes.

On appelle *aire* d'une portion de surface limitée par un contour, ou d'une surface fermée, la limite vers laquelle converge la surface d'un polyèdre inscrit, à faces infiniment pe-

tites, lorsque le nombre de ces faces croît indéfiniment. Il faut démontrer que cette limite existe et qu'elle a une valeur unique et bien déterminée, quel que soit le mode d'inscription du polyèdre dont nous venons de parler.

Soient ω l'aire d'une facette du polyèdre, α, β, γ les angles qu'elle fait avec les plans de coordonnées, ω' sa projection sur le plan des xy; on aura

$$\omega' = \omega \cos\gamma \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{\omega'}{\cos\gamma}.$$

En appelant x, y, z les coordonnées d'un point de la surface par lequel passe la facette et p, q les dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, en appelant ε un infiniment petit,

$$(2) \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \varepsilon;$$

en effet, le plan de la facette fait un angle infiniment petit avec le plan tangent, puisqu'elle contient au moins deux droites (deux de ses côtés) qui rencontrent la surface en deux points infiniment voisins, c'est-à-dire qui sont tangentes à la surface. Quand on passe aux limites, on peut donc remplacer γ par l'angle que fait le plan tangent avec le plan des xy, ce qui donne la formule (2), et par suite (1) devient, en appelant ε' un nombre infiniment petit,

$$\omega = \omega'\sqrt{1+p^2+q^2} + \varepsilon'\omega';$$

enfin l'expression de l'aire cherchée s'écrit alors

$$\Sigma\omega = \Sigma\omega'\sqrt{1+p^2+q^2} + \Sigma\varepsilon'\omega'.$$

C'est le volume d'un solide prismatique compris entre un cylindre dont la base serait la projection de l'aire courbe considérée sur le plan des xy, le plan des xy et la surface ayant pour cote le radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ augmenté d'un volume $\Sigma\varepsilon'\omega'$ qui a évidemment pour limite 0. Le premier de

ces volumes est bien déterminé; il a pour expression l'intégrale double

$$\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2};$$

$dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ est donc ce que l'on peut appeler l'*élément de surface :* c'est la portion de surface qui se projette suivant le rectangle $dx\,dy$, aux infiniment petits près du troisième ordre.

IX. — Aires des surfaces en coordonnées polaires.

Pour obtenir l'expression de l'aire d'une surface en coordonnées polaires, on part de l'expression

$$(1)\qquad S=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

qui fournit l'aire en coordonnées rectilignes, et l'on effectue le changement de variables

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\psi,\\ y &= r\sin\theta\sin\psi,\\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

r désignant le rayon vecteur du point (x, y, z), ψ sa longitude et θ sa colatitude; on trouve

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\psi)}=\sqrt{\sin^2\theta\, r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2+r^4\sin^2\theta}.$$

La formule (1) devient alors, en vertu de la règle donnée (p. 151) pour le changement de variable,

$$(2)\qquad S=\iint\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2+r^2\sin^2\theta}\; r\,d\theta\,d\psi.$$

Si l'on suppose $r=$ const., on trouve l'expression de l'aire d'une portion de sphère de rayon r

$$S=\iint r^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

ce que l'on peut vérifier en considérant deux méridiens ZC et ZD infiniment voisins faisant entre eux l'angle $d\psi$, et deux parallèles infiniment voisins AB et CD. Nous prendrons pour

Fig. 9.

élément d'aire le quadrilatère ABCD; il peut être considéré comme un rectangle de côtés AB et AC. Or, r étant le rayon de la sphère, ψ et θ la longitude et la colatitude du point A, on a

$$\mathrm{AC} = r\,d\theta, \qquad \mathrm{AB} = r \sin\theta\, d\psi;$$

l'élément de surface ABCD est donc $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$; par suite, l'aire d'une portion de sphère finie sera

$$\iint r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

ainsi qu'on l'a trouvé tout à l'heure.

Dans le cas qui nous occupe, une des intégrations peut toujours être effectuée, et l'aire d'une portion de sphère peut se présenter sous la forme d'une intégrale simple.

Lorsque la surface à évaluer est de révolution autour de l'axe des z, r n'est pas fonction de ψ et l'expression de S se simplifie; on a alors

$$\mathrm{S} = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2}\, r \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

et si l'on a à évaluer la surface d'une zone comprise entre

deux plans parallèles, l'intégration par rapport à ψ s'effectue immédiatement entre les limites o et 2π, et l'on a

$$S = 2\pi \int \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2}\, r \sin\theta \, d\theta.$$

Pour obtenir l'aire en coordonnées semi-polaires, il faudra poser

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

et l'on trouvera

$$S = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\, d\theta\, dr$$

et, en effectuant les calculs,

$$S = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 r^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta\, dr.$$

Dans une surface de révolution z ne dépend que de r, et l'on a

$$S = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + 1}\,.\, r\, dr\, d\theta.$$

La surface d'une zone comprise entre deux plans parallèles est alors donnée par la formule

$$S = 2\pi \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}\, r\, dr.$$

X. — Quadrature de quelques surfaces.

Problème de Viviani. — *Étant donné un hémisphère de rayon un, on décrit sur le rayon du grand cercle de base (pris pour plan des xy) un cercle*

(1) $$x^2 - x + y^2 = 0;$$

on prend ce cercle pour base d'un cylindre droit qui détache une sorte de calotte sur la sphère : on demande la surface de cette calotte.

La réponse à la question est

$$\iint \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Intégrons par rapport à θ, nous aurons

$$\int (\cos\theta_0 - \cos\theta_1)\, d\psi;$$

θ_0 et θ_1 sont à déduire de l'équation (1) après l'avoir transformée en coordonnées sphériques, ce qui donne

$$\sin^2\theta \cos^2\psi - \sin\theta \cos\psi + \sin^2\theta \sin^2\psi = 0$$

ou, plus simplement,

$$\theta = 0, \qquad \sin\theta = \cos\psi, \qquad \cos\theta = \sin\psi;$$

l'intégrale cherchée est donc, pour la moitié de la surface,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\psi)\, d\psi$$

ou $\frac{\pi}{2} - 1$; l'aire totale est donc $\pi - 2$.

Le volume cylindrique peut aussi se calculer facilement : on prend pour cela des coordonnées polaires dans le plan des xy et l'équation (1) devient

$$r^2 = r\cos\psi \qquad \text{ou} \qquad r = \cos\psi;$$

le volume est

$$\iiint r \, dr \, d\psi \, dz.$$

Intégrant par rapport à z de 0 à $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ou $\sqrt{1 - r^2}$, il vient

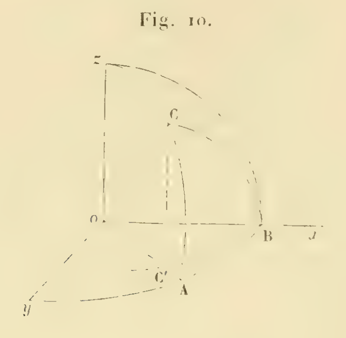
$$\iint r \, dr \sqrt{1 - r^2}\, d\psi = -\int \frac{1}{3}\Big[(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\cos\psi} d\psi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1 - \sin^3\psi)\, d\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{9},$$

et, en doublant, on trouve le volume total $\pi - \frac{4}{9}$.

Surface du triangle sphérique. — Nous choisirons un triangle rectangle d'abord; l'un de ses côtés AC sera un méri-

Fig. 10.



dien, l'autre sera la trace de la sphère sur le plan des xy et le troisième BC aura pour équation

$$z = y \operatorname{tang} B$$

ou

$$\cos\theta = \sin\theta \sin\psi \operatorname{tang} B. \tag{1}$$

Il s'agit d'évaluer

$$\int\int \sin\theta \, d\theta \, d\psi. \tag{2}$$

Intégrons de θ à $\frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$\int \cos\theta \, d\psi. \tag{3}$$

Il faut, dans cette intégrale, remplacer θ par sa valeur tirée de (1); or cette équation donne

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{1}{\sin\psi \operatorname{tang} B},$$

$$\cos\theta = \frac{\sin\psi \operatorname{tang} B}{\sqrt{1 + \sin^2\psi \operatorname{tang}^2 B}}$$

$$= \frac{\sin\psi \operatorname{tang} B}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 B - \cos^2\psi \operatorname{tang}^2 B}} = \frac{\sin\psi \sin B}{\sqrt{1 - \cos^2\psi \sin^2 B}}.$$

L'intégrale (3) prise alors entre les limites o et c donnera

$$\int_0^c \frac{\sin\psi \sin B\, d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\psi \sin^2 B}} = [\arcsin(\cos\psi \sin B)]_0^c,$$

c'est-à-dire $-\arcsin(\sin B \cos c) + B$; mais on sait que

$$\sin B \cos c = \cos C:$$

l'aire cherchée est donc

$$-\arcsin(\cos C) + B = -\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right] + B$$
$$= -\frac{\pi}{2} + C + B.$$

Pour avoir l'aire d'un triangle quelconque abc, on le dé-

Fig. 11.

composera en deux autres rectangles, par la hauteur bd, et l'on aura

$$abd = a + b_1 - \frac{\pi}{2},$$

$$bdc = c + b_2 - \frac{\pi}{2};$$

donc

$$abc = a + b + c - \pi.$$

Surface d'un cylindre tronqué. — Appelons ds un élément de l'arc de base (de section droite), l la longueur de l'arête correspondant à l'arc s, $l\,ds$ sera l'élément de surface et il faudra calculer $\int l\,ds$. Supposons qu'il s'agisse d'une base circulaire de rayon R; soit i l'inclinaison du plan de

troncature ; comptons l'arc à partir du moment où l est minimum, on aura

$$l = l_0 + R\left(1 - \cos\frac{s}{R}\right)\operatorname{tang} i,$$

$$l = l_0 + 2R\sin^2\frac{s}{2R}\operatorname{tang} i;$$

la surface est donc donnée par la formule

$$2\int_0^{R\pi} l_0\,ds + 4R\operatorname{tang} i\int_0^{R\pi}\sin^2\frac{s}{2R}\,ds,$$

c'est-à-dire

$$2 l_0 \pi R + 2\pi R^2 \operatorname{tang} i.$$

Surfaces de révolution. — Les surfaces de révolution peuvent s'obtenir par une seule intégration ; en effet, en les décomposant en zones par des parallèles infiniment voisins, la surface d'une zone peut être représentée par $2\pi x\,ds$, x désignant le rayon du parallèle moyen et ds l'élément d'arc de méridien ; sa surface totale sera donc

$$2\pi\int x\,ds.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un ellipsoïde. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation du méridien ; on a

$$z = \pm\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad dz = \mp\frac{c}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx,$$

$$dx^2 + dz^2 = ds^2 = \frac{c^2x^2 - a^2x^2 + a^4}{(a^2 - x^2)a^2}\,dx^2$$

ou, faisant $a^2 - c^2 = b^2$ et $a^2 + b^2 = K^2$,

$$ds = \sqrt{\frac{a^4 - b^2x^2}{a^4 - a^2x^2}}\,dx,$$

et, quoique ds ne puisse pas être intégré, on trouve

$$2\pi\int x\,ds = 4\pi\int_0^a\sqrt{\frac{a^4-b^2x^2}{a^4-a^2x^2}}\,x\,dx$$
$$= 2\pi\int_0^{a^2}\sqrt{\frac{a^4-b^2u}{a^4-a^2u}}\,du$$
$$= 2\pi\int_0^{a^2}\frac{a^4-b^2u}{\sqrt{a^8-K^2a^4u+a^2b^2u^2}}\,du,$$

expression dont la valeur s'obtient sous forme finie.

XI. — Théorèmes de Gauss.

Soit φ l'angle que la normale extérieure à une surface fermée fait avec un axe fixe, l'axe des x par exemple; soit $d\sigma$ l'élément de surface : l'intégrale

$$\int\int\cos\varphi\,d\sigma,$$

étendue à toute la surface fermée considérée, est nulle.

En effet, l'élément de surface $d\sigma$ est égal à $\pm\frac{dy\,dz}{\cos\varphi}$, donc l'intégrale considérée revient à $\int\int\pm\,dx\,dy$; le signe $+$ convient au cas où la normale extérieure fait un angle aigu avec l'axe des x et le signe $-$ au cas contraire. Or à un élément $dx\,dy$ pour lequel $\cos\varphi$ est positif correspond un autre pour lequel il est négatif, ce dont on s'assure en considérant le parallélépipède qui a $dy\,dz$ pour base et qui doit nécessairement couper la surface un nombre pair de fois et alternativement en des points où $\cos\varphi$ est positif et négatif.

Le volume du corps compris à l'intérieur de la surface fermée est, en conservant les notations précédentes,

$$\int\int x\cos\varphi\,d\sigma = \int\int x\,dy\,dz.$$

Soient r le rayon vecteur issu de l'origine, μ l'angle que fait la normale extérieure avec ce rayon ; le volume est aussi exprimé par

$$\frac{1}{3}\int\int r\, d\sigma \cos\mu;$$

car $d\sigma\cos\mu$ est la section droite d'un cône ayant son centre à l'origine et découpant l'élément de surface $d\sigma$.

L'intégrale

$$\int\int\frac{d\sigma\cos\mu}{r^2}$$

est nulle ou égale à 4π, suivant que l'origine est à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface.

En effet, décrivons de l'origine comme centre une sphère avec un rayon égal à un. Soit ω l'aire découpée dans cette sphère par le cône infinitésimal ayant son centre à l'origine et pour base $d\sigma$; on a évidemment

$$\frac{d\sigma\cos\mu}{r^2} = d\omega;$$

or $\int\int d\omega$ représente, si l'origine est intérieure à la surface donnée, toute la surface 4π de la sphère; elle est nulle dans le cas contraire.

XII. — Sur la difference des valeurs que peut prendre une intégrale multiple en intervertissant l'ordre des intégrations.

Pour que l'on puisse intervertir l'ordre des intégrations dans une intégrale multiple, il faut que la quantité placée sous les signes d'intégration ne devienne pas infinie, ainsi qu'on l'a supposé dans la démonstration de ce théorème.

Supposons que l'on ait

$$f(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y},$$

on aura

$$\int_{x_0}^{X}\left[\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_{x_0}^{X}[\psi(x,Y)-\psi(x,y_0)]\,dx,$$

$$\int_{y_0}^{Y}\left[\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\right]dy = \int_{y_0}^{Y}[\varphi(X,y)-\varphi(x_0,y)]\,dy,$$

et, en général, en posant

$$\int_{x_0}^{X}[\psi(x,Y)-\psi(x,y_0)]\,dx - \int_{y_0}^{Y}[\varphi(X,y)-\varphi(x_0,y)]\,dy = \Delta,$$

on trouvera

$$\Delta = 0.$$

Cependant, si, pour $x = a$, $y = b$, les fonctions φ et ψ étaient infinies, on pourrait ne plus avoir $\Delta = 0$; on peut d'ailleurs calculer Δ. En effet, pour ε et ε' infiniment petits,

$$\int_{x_0}^{X}[\psi(x,Y)-\psi(x,y_0)]\,dx$$

$$= \lim\left\{\int_{x_0}^{a-\varepsilon}[\psi(x,Y)-\psi(x,y_0)]\,dx + \int_{a+\varepsilon'}^{X}[\psi(x,Y)-\psi(x,y_0)]\,dx\right\}$$

$$= \lim\left\{\int_{y_0}^{Y}[\varphi(a-\varepsilon,y)-\varphi(x_0,y)]\,dy + \int_{y_0}^{Y}[\varphi(X,y)-\varphi(a+\varepsilon',y)]\,dy\right\}$$

$$= \lim\int_{y_0}^{Y}[\varphi(X,y)-\varphi(x_0,y)+\varphi(a-\varepsilon,y)-\varphi(a+\varepsilon',y)]\,dy;$$

on conclut de là, avec Cauchy,

$$\Delta = \lim\int_{y_0}^{Y}[\varphi(a-\varepsilon,y)-\varphi(a+\varepsilon',y)]\,dy.$$

Gauss a déduit des remarques précédentes une démonstration curieuse de ce théorème :

Tout polynôme entier en z à coefficients réels du degré n est décomposable en facteurs réels du premier et du second degré.

Soit

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \dots A_n z^n$$

un polynôme entier de degré n. Si nous posons

$$z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

nous aurons

$$F(z) = P + Q\sqrt{-1},$$

$$P = A_0 + A_1 r\cos\theta + \dots + A_n r^n \cos n\theta,$$
$$Q = \phantom{A_0 +{}} A_1 r\sin\theta + \dots + A_n r^n \sin n\theta,$$

et il suffit de prouver que $P^2 + Q^2$, module de $F(z)$, passe par zéro. C'est ce que nous allons faire d'après Gauss. (Je dois dire que Gauss évite de parler d'imaginaires, mais c'est là un tour de force que nous ne reproduirons pas, et pour l'étude duquel nous renverrons à sa thèse.)

Posons

$$V = \operatorname{arc\,tang} \frac{P}{Q},$$

et intégrons $\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta}$ entre les limites 0 et 2π pour θ, 0 et ∞ pour R.

L'intégration effectuée d'abord par rapport à R donne

$$A = \int_0^{2\pi} \left[\frac{d\theta}{P^2 + Q^2} \left(Q\frac{\partial P}{\partial\theta} - P\frac{\partial Q}{\partial\theta} \right) \right]_0^\infty ;$$

l'intégration effectuée d'abord par rapport à θ donne

$$B = \int_0^\infty \left[\frac{dr}{P^2 + Q^2} \left(Q\frac{\partial P}{\partial r} - P\frac{\partial Q}{\partial r} \right) \right]_0^{2\pi}.$$

L'intégrale B est nulle; car, pour $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, la quantité entre crochets prend des valeurs égales. Pour calculer A, nous observons que, pour $r = 0$, $\frac{Q\,\partial P - P\,\partial Q}{\partial\theta}$ est nul; si, pour calculer la valeur de cette expression pour $r = \infty$, on ne

conserve au numérateur et au dénominateur que les termes du degré le plus élevé en r, on trouve

$$\frac{nr^{2n}A_n^2 + \ldots}{r^{2n}A_n^2 + \ldots} = n.$$

On a donc $A = \int_0^{2\pi} n\,d\theta$ ou $2n\pi$. De ce que l'on trouve pour A et B des valeurs différentes, il faut en conclure que les quantités placées sous le signe $\int$ dans A et B passent par l'infini, ce qui ne peut avoir lieu que si $P^2 + Q^2$ s'annule.

Il ne serait pas plus difficile de prouver par un procédé analogue que toute équation algébrique à coefficients réels ou imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$ admet toujours une racine réelle ou imaginaire de la même forme.

XIII. — Remarques au sujet des intégrales multiples prises entre des limites infinies.

Une intégrale multiple prise entre des limites infinies peut avoir plusieurs valeurs distinctes, suivant la manière dont on fait croître les variables d'intégration ou, si l'on veut faire usage d'un langage géométrique, suivant la forme du contour infini à l'intérieur duquel on fait croître les variables d'intégration.

Considérons avec M. Cayley l'intégrale

$$\int\int \sin(x^2 - y^2)\,dx\,dy;$$

si l'on intègre à l'intérieur d'un rectangle, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos y^2\,dx\,dy$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \sin y^2\,dx\,dy$$

ou, d'après la valeur connue des intégrales de Fresnel (p. 137),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Au contraire, si l'on prend pour limites d'intégration un cercle, il faudra poser $x^2+y^2=r^2$ et prendre pour élément $r\,d\theta\,dr$; l'intégrale cherchée devient alors

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r \sin r^2\,d\theta\,dr$$

ou

$$2\pi\int_0^{\infty} r\sin r^2\,dr,$$

résultat indéterminé. Ce fait a une grande importance et doit mettre en garde contre des fautes que l'on pourrait être tenté de commettre.

Proposons-nous d'évaluer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$; à cet effet posons avec Poisson

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy;$$

multipliant ces formules membre à membre, on a

$$X^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

et l'intégrale double, qui se réduit au produit de deux intégrales simples, doit être prise à l'intérieur d'un rectangle. Poisson se croit autorisé à prendre pour limites du contour d'intégration un cercle; à cet effet, considérant $e^{-(x^2+y^2)}$ comme l'ordonnée d'une surface et l'intégrale X^2 comme son volume, il prend des coordonnées polaires dans le plan des xy, le volume cherché s'écrit alors sous la forme

$$X^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\theta\,dr,$$

d'où

$$X^2 = \int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2} dr;$$

l'intégrale de $e^{-r^2} 2r$ étant $-e^{-r^2}$, on a

$$X^2 = \pi, \qquad X = \sqrt{\pi}.$$

Le résultat est exact, mais le raisonnement qui conduit à ce résultat est incomplet, et rien ne prouve que l'intégrale évaluée comme nous l'avons fait soit égale à l'intégrale prise à l'intérieur d'un rectangle.

Mais il est facile de corriger notre raisonnement, en montrant que la différence entre l'intégrale prise à l'intérieur du rectangle et à l'intérieur du cercle est nulle. En effet, soient $2l$ et $2l'$ les longueurs des côtés du rectangle : prenons pour cercles d'intégration deux cercles de rayons $\sqrt{l^2 + l'^2}$ et $l' < l$; les intégrales prises à l'intérieur de ces deux cercles ont même limite $\sqrt{\pi}$. L'intégrale prise à l'intérieur du rectangle est évidemment comprise entre les deux précédentes : donc sa limite est la même $\sqrt{\pi}$. Mais ce raisonnement ne s'applique plus à l'intégrale

$$\int\int \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

XIV. — Théorème général sur les séries doubles.

Le théorème de Cauchy (p. 105) peut être généralisé.

THÉORÈME. — *Si $\varphi(x, y)$ est une fonction de x et y positive pour toutes les valeurs positives de x et y, et décroissante quand x ou y croît, la série double $\sum_0^\infty \sum_0^\infty \varphi(m, n)$ sera convergente ou divergente suivant que l'intégrale double $\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y)\, dx\, dy$ sera finie ou infinie.*

En effet, la fonction φ peut être considérée comme le z d'une surface; l'intégrale de $\varphi(x, y)\,dx\,dy$ prise à l'intérieur d'un contour quelconque pourra être regardée comme le volume cylindrique ayant pour base le contour en question et pour hauteur en chaque point x, y la quantité $z = \varphi(x, y)$. La somme des termes de la série contenus dans ce contour sera la somme d'une série de prismes de base un et dont la hauteur variable sera un terme de la série. Nous supposons tout contour limité à l'axe des x et à l'axe des y. Ceci posé, on a, pour un contour quelconque,

$$\sum\sum \varphi(m+1, n+1) < \int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy,$$
$$\sum\sum \varphi(m, n) > \int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy;$$

si donc la série a une limite, l'intégrale en a une aussi; si l'intégrale a une limite, la série en a une aussi.

Corollaire. — La série dont le terme général est $\frac{1}{m^\beta n^\alpha}$ est convergente si α et β sont plus grands que un, parce que

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{x^\beta y^\alpha}\,dx\,dy = \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

est une quantité finie.

Il est clair que le théorème de Cauchy peut être encore généralisé et appliqué à ce que nous pourrions appeler des *séries triples, quadruples,* etc. Ces généralisations seront facilement effectuées par le lecteur, quand nous aurons exposé la théorie de l'espace à n dimensions, ce qui va être fait dans les paragraphes suivants.

XV. — De l'hyperespace.

On a déjà eu l'occasion de voir combien la Géométrie et surtout le langage géométrique facilitent l'exposition de certaines théories au fond purement algébriques. Malheu-

reusement les considérations géométriques ne peuvent guère s'étendre aux questions dans lesquelles interviennent plus de trois variables indépendantes. On a cherché à remédier à cet inconvénient en créant une sorte de géométrie fictive que l'on a appelée la *théorie de l'hyperespace* ou géométrie à n dimensions : nous allons en exposer les principes.

Un ensemble de n variables x_1, x_2, ..., x_n constitue un *point*, dans la géométrie à n dimensions. Une équation représente une *surface*, ou une *variété* à $n-1$ dimensions ; une équation du premier degré représente un *plan* ; l'équation

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = R^2$$

représente une *hypersphère*, le point a_1, a_2, ..., a_n en est le *centre*, R le *rayon*

Deux équations entre x_1, x_2, ..., x_n représentent une variété à $n-2$ dimensions ; trois équations, une variété à $n-3$ dimensions, etc.

n équations représentent des points dont les *coordonnées* sont les valeurs de x_1, x_2, ... satisfaisant à ces équations. Les points sont de dimension zéro.

Un point et un plan passant par ce point (c'est-à-dire dont l'équation est satisfaite par les coordonnées du point) constituent un *élément* de l'hyperespace.

La *distance* δ de deux points est l'expression

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \dots},$$

dans laquelle x_1, x_2, ... et x_1', x_2', ... sont respectivement les coordonnées de ces points.

La *droite* qui *joint* ces deux points est la variété à une dimension représentée par les équations

$$\frac{X_1 - x_1}{x_1 - x_1'} = \frac{X_2 - x_2}{x_2 - x_2'} = \dots = \frac{R}{r},$$

R désignant la distance des points X_1, X_2, ... et x_1, x_2, ...,

et r la distance des points $x_1, x_2, \ldots$ et $x'_1, x'_2, \ldots$. Ces équations peuvent aussi s'écrire

$$\frac{X_1 - x'_1}{x_1 - x'_1} = \frac{X_2 - x'_2}{x_2 - x'_2} = \ldots;$$

$\frac{x_1 - x'_1}{r}, \frac{x_2 - x'_2}{r}, \ldots$ ou des quantités proportionnelles à celles-ci sont alors les coefficients directeurs de la droite considérée; si l'on pose

$$\frac{x_1 - x'_1}{r} = \cos\alpha_1, \qquad \frac{x_2 - x'_2}{r} = \cos\alpha_2, \qquad \ldots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les angles de la droite considérée avec les axes. $\cos\alpha_1 \cos\alpha'_1 + \cos\alpha_2 \cos\alpha'_2 + \ldots$ étant posé égal à $\cos V$, V sera l'angle des directions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$; de là découle la notion des droites parallèles ou perpendiculaires. Si l'on considère le plan

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n + A_{n+1} = 0,$$

la direction ayant pour coefficients directeurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est celle de la *normale du plan;* d'où l'on déduit la notion de plans parallèles, perpendiculaires, etc.

Si l'on effectue sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une substitution linéaire orthogonale, on fait ce que l'on peut appeler une transformation de coordonnées, et les définitions données pour les diverses quantités appelées *distances*, *angles*, etc., subsistent pour leurs transformées.

XVI. — Surfaces fermées.

Considérons une surface

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

et un point $a_1, a_2, \ldots, a_n$; supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0$$

(et l'on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi, si le point $a_1, a_2, \ldots$ n'est pas sur la surface).

Les points de l'espace à n dimensions, à l'exception de ceux qui sont sur la surface, se partagent en deux catégories : ceux pour lesquels $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a le même signe que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et ceux pour lesquels $f(x_1, \ldots, x_n)$ a un signe opposé : je dirai que les premiers appartiennent à la région négative, et que les autres appartiennent à la région positive.

Ceci posé, coupons la surface par une droite passant par le point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, à savoir

$$(2) \qquad \frac{x_1 - a_1}{\cos\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\cos\alpha_2} = \ldots = r;$$

r désignera la distance des points $(a_1, a_2, \ldots)$ et $(x_1, x_2, \ldots)$. Nous pouvons supposer r toujours positif; les r des points d'intersection de la droite (2) et de la surface (1) seront donnés par la formule,

$$(3) \qquad f(a_1 + r\cos\alpha_1, a_2 + r\cos\alpha_2, \ldots) = 0.$$

Maintenant donnons à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des valeurs déterminées et supposons r très petit, le premier membre (3) sera de même signe que $f(a_1, a_2, \ldots)$, c'est-à-dire négatif, et il peut se faire que, r grandissant, le premier membre de (1) conserve le même signe, de même qu'il peut en changer plusieurs fois. Appelons ν le nombre de changements de signe qu'il éprouve quand r varie de 0 à $+\infty$, et supposons ce nombre fini. Faisons maintenant varier $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, le nombre ν va varier en général, et cela brusquement, puisqu'il est entier; si le nombre ν ne peut varier que parce que deux ou plusieurs valeurs de r sont devenues égales et ont simultanément disparu par couples, on dira que la surface (1) est continue. Ainsi dans une surface continue, et nous n'en considérons pas d'autres, le nombre ν reste toujours de même parité en comptant les valeurs doubles, triples, etc., de r pour deux, trois, etc.

Lorsque, dans une surface continue, r ne peut être infini, on dit qu'elle est *fermée;* alors, si le nombre ν est pair, on

dit que le point $(a_1, a_2, \dots)$ est *extérieur;* si le nombre ν est impair, ce point est *intérieur* à la surface.

Tous les points intérieurs appartiennent à une même région, tous les points extérieurs à l'autre région.

Soient, en effet, M et N deux points intérieurs : joignons $MN = R$; appelons r la distance du point M à un autre point de MN situé sur la direction de MN. Faisons varier r jusqu'à ce qu'il devienne égal à R, puis continuons à le faire croître : son extrémité aura rencontré un nombre impair de fois la surface; mais elle aura aussi rencontré un nombre impair de fois la surface après que r aura passé par la valeur R; donc, pour passer de o à R, l'extrémité de r a rencontré un nombre pair de fois la surface, et f a le même signe en M et en N : ces points appartiennent donc à la même région.

Nous dirons qu'une surface fermée est *simple* quand, en faisant varier les coordonnées d'un point d'une manière continue, à l'intérieur de la surface, on pourra l'amener d'une position quelconque M à une autre position quelconque N sans le faire changer de région et sans même lui faire rencontrer la surface.

XVII. — Mesure de l'étendue des variétés.

Une variété à une dimension, une *ligne* si l'on veut, a pour *longueur* la somme des distances de ses points successifs, ou, pour nous exprimer plus rigoureusement, la valeur de l'intégrale

$$\int \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2},$$

dans laquelle $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne. Les limites de l'intégrale correspondent aux points extrêmes de la ligne.

Les analogies nous conduisent à mesurer l'*espace intérieur* à une surface fermée simple

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

par l'intégrale n^{uple}

$$\int\int\int \ldots dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue à tout le domaine des points intérieurs à (1) et définis par suite par une formule telle que

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0.$$

Nous mesurerons l'étendue de la surface (1) au moyen de la formule

$$\int\int \ldots dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}},$$

étendue à tous les points satisfaisant à la relation (2).

La mesure de la variété à $n-1$ dimensions

$$f = 0, \qquad g = 0$$

sera

$$\int\int \ldots dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-2} \frac{\sqrt{\sum \left[\frac{\partial(f, g)}{\partial(x_i, x_j)}\right]^2}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x_{n-1}, x_n)}},$$

et ainsi de suite.

Les théories exposées dans ce paragraphe facilitent l'exposition de certaines parties de la théorie des intégrales multiples.

XVIII. — Surface de l'hypersphère.

Considérons l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2,$$

et proposons-nous d'évaluer l'étendue de sa surface. Cette surface est évidemment fermée et simple, et la mesure demandée est

$$\int\int \ldots dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}{x_n}$$

ou

$$\int\int \ldots dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}}.$$

Pour évaluer cette intégrale, on peut procéder comme il suit : on posera

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\theta_1,\\
x_2 &= R\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-2} &= R\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2},\\
x_{n-1} &= R\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
x_n &= R\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\ldots\ldots\ldots\sin\theta_{n-1}:
\end{aligned}$$

on aura bien

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

et

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{\partial(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})} = \pm R^{n-1}\sin^{n-1}\theta_1\sin^{n-2}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1},$$

en sorte que l'intégrale à évaluer deviendra (p. 151)

$$\int\int \ldots R^{n-1}\sin\theta_1^{n-2}\sin\theta_2^{n-3}\ldots\sin\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1};$$

quant aux limites, on voit qu'elles seront

$$\left.\begin{matrix}0\\ \pi\end{matrix}\right\}\text{ pour }\theta_1,\qquad \left.\begin{matrix}0\\ \pi\end{matrix}\right\}\text{ pour }\theta_2\ldots\qquad \left.\begin{matrix}0\\ 2\pi\end{matrix}\right\}\text{ pour }\theta_{n-1},$$

afin que les x acquièrent une fois et une fois seulement toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$. Or on a (p. 64)

$$\int_0^\pi \sin^{2m}\theta\, d\theta = \pi\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m},$$

$$\int_0^\pi \sin^{2m+1}\theta\, d\theta = 2.\frac{2.4\ldots 2m}{1.3\ldots(2m+1)}.$$

Notre intégrale devient alors

$$2\pi.\,2.\,\frac{1}{2}\pi.\,2\frac{2}{3}.\pi\frac{1.3}{2.4}.2\frac{2.4}{3.5}\ldots R^{n-1};$$

pour $n = 2$, on a $2\pi R$; pour $n = 3$, on a $4\pi R^2$, . . .

La même méthode s'appliquerait à l'évaluation de l'étendue comprise à l'intérieur de l'hypersphère ; nous ne ferons pas l'évaluation de cette étendue dont la valeur ne nous sera pas utile dans la suite.

XIX. — Théorème de Green.

Soit u une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant à l'identité

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

et nous verrons tout à l'heure qu'il existe des fonctions jouissant de cette propriété ; soit v une autre fonction des mêmes variables, finie et continue dans un certain domaine D. Supposons d'abord que la fonction u soit également finie et continue dans ce domaine et considérons l'intégrale

$$\Omega = \int\int \ldots v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

qui par conséquent est nulle quand on l'étend au domaine en question. Considérons d'abord le premier terme ; on a, en intégrant par parties par rapport à x,

$$\int\int \ldots v \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\, dx_1 \ldots dx_n = \int\int \ldots v \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_2 \ldots dx_n$$
$$- \int\int \ldots \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

et, en ajoutant toutes les équations analogues à celle-ci, on trouve, en se rappelant que $\Omega = 0$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int\int \ldots \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \\ &\quad = \int\int \ldots \sum_i v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n. \end{aligned} \right.$$

Parmi les fonctions u qui satisfont à l'équation (1) se trouve la fonction

$$(3) \qquad u = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier; en effet l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -(n-2)x_i(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = n(n-2)x_i^2(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n+2}{2}} - (n-2)(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}};$$

en faisant $i = 1, 2, \ldots, n$ et en ajoutant les équations ainsi obtenues, on trouve l'équation (1).

Faisons, pour abréger,

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

et remplaçons dans (2) u par $R^{-(n-2)}$, et par conséquent $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ par $-(n-2)x_i R^{-n}$, nous aurons

$$\int\int\ldots\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}x_2 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}x_n\right)R^{-n}dx_1\ldots dx_n$$
$$= \int\int\ldots\sum_i v x_i dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n R^{-n}.$$

Il résulte de là que, si v est une fonction homogène de degré zéro ou une constante, on a simplement

(4) $$\int\int\ldots\sum_i v x_i dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n R^{-n} = 0.$$

Cette équation va nous servir à établir un théorème important de M. Kronecker. La formule (2) a été trouvée par Green dans le cas où $n = 3$.

XX. — Théorème de M. Kronecker.

Changeons de variables dans la formule (4) du paragraphe précédent et, à la place des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mettons d'autres variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$, que nous supposerons liées par la relation

(5) $$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0,$$

qui sera, par rapport aux nouvelles variables, l'équation de

la surface qui limite le domaine D; cette surface sera par conséquent supposée fermée. Si l'on suppose z_i tiré de l'équation (5), on aura (p. 151)

$$\int\int\ldots\sum_i \varepsilon x_i\,dx_1\ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\ldots dx_n\,\mathrm{R}^{-n}$$
$$=\int\int\ldots\sum_i \varepsilon x_i\,\frac{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots,z_n)}\,\mathrm{R}^{-n}\,dz_1\ldots dz_{i-1}\,dz_{i+1}\ldots dz_n;$$

remplaçons le premier membre par sa valeur 0 et transformons le second membre : nous trouverons

$$\int\int\ldots\varepsilon\begin{vmatrix} 0 & \frac{\omega}{dz_1} & \frac{\omega}{dz_2} & \ldots & \frac{\omega}{dz_n} \\ x_1 & \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial z_n} \\ x_2 & \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial z_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & \frac{\partial x_n}{\partial z_1} & \frac{\partial x_n}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}\mathrm{R}^{-n}=0,$$

ω désignant le produit $dz_1, dz_2, \ldots, dz_n$. Telle est la formule de M. Kronecker; on peut lui donner une autre forme. En effet, en appelant $d\sigma$ l'élément de la surface (5), on a

$$d\sigma=\frac{\omega}{dz_i}\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_n}\right)^2}}{\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_i}},$$

de sorte que, si l'on fait

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_1} & \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_n} \\ x_1 & \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial z_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & \frac{\partial x_n}{\partial z_1} & \frac{\partial x_n}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial z_n} \end{vmatrix},$$

$$\Theta=\sqrt{\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z_n}\right)^2},$$

on aura

$$\int\int\cdots\frac{c\Delta}{\theta R^n}\,d\sigma = 0. \tag{6}$$

Mais cette formule suppose que R ne s'annule pas; la fonction n étant censée finie dans le domaine D; donc x_1, x_2, ..., x_n ne doivent pas s'annuler à la fois dans l'intérieur de la surface représentée par la formule (5).

Supposons maintenant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuls à la fois en des points

$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$ que nous appellerons M,

$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,$ » N,

... ...

Observons que la formule (6) a lieu pour une surface fermée, lors même qu'elle ne serait pas simple, mais composée de surfaces fermées ne se coupant pas et intérieures à une même surface extérieure. Appelons $I_1, I_2, \ldots$ des surfaces simples intérieures à une surface simple S et ne se coupant pas, et désignons par H l'intégrale de $\frac{c\Delta}{\theta R^n}\,d\sigma$, relative à la surface S, et par $K_1, K_2, \ldots$ les intégrales de la même quantité, relatives aux surfaces $I_1, I_2, \ldots$, on aura

$$H = K_1 + K_2 + \ldots.$$

Si donc nous désirons la valeur de l'intégrale

$$P = \int\int\cdots\frac{c\Delta}{\theta R^n}\,d\sigma,$$

dans l'hypothèse nouvelle où nous nous plaçons, il suffira de l'évaluer successivement pour des surfaces fermées infiniment petites contenant dans leur intérieur les points M, N, ... respectivement.

Évaluons l'intégrale prise autour du point M; à cet effet, reprenons d'abord $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour variables, nous aurons

$$P = \int\int\cdots\sum c\,x_i\,dx_1\ldots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\ldots dx_n\,R^{-n};$$

rien ne nous empêche alors de limiter le domaine de l'intégration à l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2,$$

ρ désignant une quantité aussi petite que l'on voudra. On pourra alors faire sortir φ de dessous le signe $\int$ à la condition de le remplacer par sa valeur pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... ou pour $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, ..., valeur que nous appellerons A, et il viendra

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} \int\int \cdots \sum \frac{x_i\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n}{\rho^n}.$$

L'intégrale qui figure dans cette formule ne change pas quand on fait varier ρ; on peut donc le supposer égal à un, mais alors elle est l'expression de la surface de l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

surface que nous appellerons ϖ_n, en sorte que

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}\varpi_n.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soient A, B, C, ... *les valeurs que prend la fonction* φ *homogène de degré zéro aux points* M, N, ... *et* ϖ_n *la surface de l'hypersphère de l'espace à n dimensions; on a*

$$\int\int \cdots \frac{\varphi\Delta}{\Theta \mathrm{R}^n}\, d\sigma = \varpi_n(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \ldots),$$

l'intégrale étant prise le long de la surface $\mathrm{F} = 0$ *qui contient les points* M, N, ... *pour lesquels on a à la fois*

$$(7) \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0.$$

Si l'on suppose $\varphi = 1$, on a le théorème de M. Kronecker en vertu duquel, *le nombre des solutions communes aux*

équations (7) *contenues dans la surface* $F = 0$ *est égal à l'intégrale*

$$\iint\cdots\frac{\Delta\,d\sigma}{\varpi_n\Theta R^n},$$

étendue à la surface $F = 0$.

On peut étendre ces théorèmes aux fonctions de variables imaginaires. Considérons en effet les équations

$$(8)\qquad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \ldots,\quad \varphi_n = 0,$$

dans lesquelles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions des variables imaginaires $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$; si l'on fait

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= z_1 + t_1\sqrt{-1}, & \zeta_2 &= z_2 + t_2\sqrt{-1}, & \ldots,\\
\varphi_1 &= x_1 + y_1\sqrt{-1}, & \varphi_2 &= x_2 + y_2\sqrt{-1}, & \ldots,
\end{aligned}$$

et si l'on désigne par v une fonction homogène des ζ, par $v_a, v_b, \ldots$ les valeurs qu'elle prend aux points A, B, ..., où les équations sont satisfaites en même temps à l'intérieur de la surface $F = 0$, on aura

$$(9)\qquad \sum v_a = \frac{1}{\varpi_{2n}}\iint\cdots\frac{v\,\Delta\,d\sigma}{\Theta R^{2n}},$$

l'intégrale étant étendue à la surface considérée; bien entendu, F est fonction réelle de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & \dfrac{\partial F}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F}{\partial t_1} & \cdots\\
x_1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots\\
y_1 & \dfrac{\partial y_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial t_1} & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix},$$

$$\Theta = \sqrt{\sum\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \sum\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2};$$

enfin $d\sigma$ est l'élément de la surface $F=0$. Cette formule fournit le nombre des solutions des équations (8) contenu dans cette surface quand on suppose $v=1$.

EXERCICES ET NOTES.

1. Démontrer que l'on a

$$\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dx\,dy$$
$$+\int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

2. Si l'on pose

$$x=\varphi(\lambda,\mu),\qquad y=\chi(\lambda,\mu),\qquad z=\psi(\lambda,\mu),$$

l'élimination de λ et μ fournit une certaine surface dont l'aire est représentée par

$$\int\int\sqrt{\mathrm{LM}-\mathrm{R}^2}\,d\lambda\,d\mu,$$

formule où

$$\mathrm{L}=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2,$$
$$\mathrm{M}=\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2,$$
$$\mathrm{R}=\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu}+\frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu}.$$

3. Si l'on pose dans l'intégrale qui donne l'aire de la sphère

$$x=r\sin\psi\sqrt{1-m^2\sin^2\theta},$$
$$y=r\cos\theta\cos\psi,$$
$$z=r\sin\theta\sqrt{1-n^2\sin^2\psi},$$

l'aire de la huitième partie de la sphère de rayon r sera donnée par la formule

$$r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{m^2\cos^2\theta+n^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\theta}\sqrt{1-n^2\sin^2\psi}}\,d\theta\,d\psi=\frac{\pi}{2}r^2.$$

4. Prouver que, en posant

$$F(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2\sin^2\theta}\, d\theta = E(m),$$

on a

$$F(m)E(n) + F(n)E(m) - F(m)F(n) = \frac{\pi}{2}.$$

(LEGENDRE, *Fonct. elliptiques.*)

5. Soient $x, y, z, \ldots$ et $x', y', z', \ldots$ deux systèmes de variables, m une constante, φ et f deux fonctions continues. Si l'on a deux fonctions F_1 et F_2, telles que

$$\int\int\int \ldots \varphi(x', y', \ldots) f(x, y, z, \ldots, x', y', z', \ldots) F_1(x', y', z', \ldots)\, dx', dy', dz'$$
$$= m F_2(x, y, z, \ldots),$$

on aura, entre les mêmes limites,

$$\int\int\int \ldots \varphi(x', y', z', \ldots) F_1(x', y', z', \ldots) F_2(x', y', z', \ldots)\, dx'\, dy'\, dz' \ldots = 0.$$

(LIOUVILLE, 1re série, t. X, p. 327.)

6. Trouver un point tel que la somme

$$\int f(x, y, z) r^2 dv$$

soit minima, r désignant la distance de ce point au point x, y, z, et l'intégrale étant relative à tous les éléments dv d'un volume, d'une surface ou d'une ligne donnés.

Ce point est le *centre de gravité* du corps $\int dv$, dont l'élément dv possède la *densité* f.

7. Trouver un axe, tel que l'intégrale

$$\int f(x, y, z) r^2 dv$$

soit la plus petite possible, r désignant la distance du point (x, y, z) à l'axe en question et dv l'élément de volume d'un corps donné. L'intégrale est supposée étendue à tous les éléments dv de ce corps.

(Même problème en remplaçant le mot *axe* par le mot *plan*.)

8. Évaluer le volume compris entre les plans de coordonnées, le plan $x+y=\frac{\pi}{2}$ et la surface représentée par l'équation

$$z=\cos x \cos y.$$

9. Évaluer l'intégrale

$$\int\int\int \ldots dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

avec la condition

$$0 < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1.$$

10. Évaluer l'intégrale

$$\int\int\int e^{-x^2-y^2-z^2} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

avec la condition

$$x^2+y^2+z^2 < R^2.$$

11. Le paraboloïde hyperbolique qui passe par quatre arêtes consécutives (formant un quadrilatère gauche) d'un tétraèdre partage ce tétraèdre en deux parties équivalentes.

CHAPITRE V.

INTÉGRALES DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

I. — Conditions pour qu'une fonction soit une différentielle exacte.

Étant donnée une expression de la forme

(1) $$P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_n\,dx_n = \Sigma P\,dx,$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il n'existe pas en général de fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui l'admette pour différentielle; en effet, pour qu'il existe une telle fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il faut que l'on ait identiquement

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = \Sigma P\,dx,$$

c'est-à-dire, en égalant les coefficients de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = P_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = P_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = P_i, \quad \ldots.$$

Or on a, en différentiant la $i^{\text{ième}}$ équation par rapport à x_j,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j};$$

on a de même, en différentiant la $j^{\text{ième}}$ équation par rapport à x_i,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i},$$

d'où l'on conclut

(2) $$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i},$$

en permutant i et j avec chacun des indices 1, 2, ..., n, on

obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ relations analogues qui doivent être identiquement satisfaites si l'on veut que (1) soit une différentielle exacte.

Réciproquement, si les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations (2) ont lieu, il existera toujours une fonction F admettant l'expression $\sum P\,dx$ pour différentielle. En effet, si nous posons

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1\,dx_1 + F_2(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

il est clair que l'on aura

$$(3) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = P_1,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\,dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2};$$

mais la seconde de ces formules, en vertu de (2), peut s'écrire

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$$
$$= P_2 - A_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2},$$

A_2 désignant ce que devient P_2 quand on y remplace x_1 par a_1, et l'on aura

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = P_2,$$

si l'on prend

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = A_2$$

ou, en appelant F_3 une fonction de $x_3, x_4, \ldots, x_n$,

$$F_2 = \int_{a_2}^{x_2} A_2\,dx_2 + F_3(x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

Donc la fonction

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} A_2\,dx_2 + F_3(x_3, \ldots, x_n)$$

admet pour dérivées par rapport à x_1 et x_2 les quantités P_1 et P_2; on a ensuite

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_3}\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\,dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_3}{\partial x_1}\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial A_3}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3};$$

A_3 désignant ce que devient P_3 pour $x_1 = a_1$, cette formule donne

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3 - A_3 + A_3 - A'_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

A'_3 désignant ce que devient P_3 quand on y fait $x_1 = a_1$ et $x_2 = a_2$; on en tire

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3 - A'_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

et l'on aura $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3$, si

$$A'_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

c'est-à-dire si

$$F_3 = \int_{a_3}^{x_3} A'_3\,dx_3;$$

alors la fonction

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} A_2\,dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} A'_3\,dx_3 + F_4$$

admettra pour dérivées par rapport à x_1, x_2, x_3 les quantités P_1, P_2, P_3, et ainsi de suite. Il résulte de là que la fonction

$$\int_{a_1}^{x_1} P_1\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} A_2\,dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} A_3\,dx_3 + \ldots + \int_{a_n}^{x_n} A_n\,dx_n$$

aura pour différentielle l'expression (1), si l'on a en général

$$A_{i+1} = P_{i+1}(a_1, a_2, \ldots, a_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n).$$

Il y a plus, deux fonctions ayant même différentielle ne

pouvant différer que par une constante, l'expression trouvée tout à l'heure sera, à une constante près, la seule qui admette pour différentielle $\Sigma P dx$.

II. — Remarques au sujet des conditions d'intégrabilité.

Nous venons de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression $P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \ldots + P_n dx_n$ soit une différentielle exacte était que l'on eût les $\frac{1}{2} n(n-1)$ identités

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = 0.$$

Ces conditions à la vérité sont nécessaires et suffisantes, mais Jacobi a prouvé que, pour $n > 3$, elles se réduisaient à $2n - 3$ équations distinctes.

D'ailleurs, pour $n = 3$ et $n = 2$, on a

$$\frac{1}{2} n(n-1) = 2n - 3,$$

en sorte que l'on peut dire que, dans tous les cas, le nombre des conditions distinctes d'intégrabilité est $2n - 3$.

Pour démontrer cette proposition, posons

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = Q_{ij};$$

nous aurons

$$Q_{ij} = -Q_{ji}, \qquad Q_{ii} = 0.$$

On a identiquement

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial Q_{ki}}{\partial x_j} = 0,$$

ainsi qu'on peut le vérifier en remplaçant Q_{ij}, Q_{jk}, Q_{ki} par leurs valeurs. Il en résulte que, si Q_{jk} et Q_{ki} sont nuls identiquement, on aura $\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_k} = 0$ et, par suite, Q_{ij} ne contiendra pas x_k.

Ceci posé, considérons les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} Q_{12} = 0, \\ Q_{23} = 0, \qquad Q_{13} = 0, \\ Q_{34} = 0, \qquad Q_{14} + x_3 Q_{24} = 0, \end{cases}$$

qui ont lieu quand $P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + P_3\,dx_3 + P_4\,dx_4$ est une différentielle exacte, car alors $Q_{12} = 0$, $Q_{23} = 0$, $Q_{13} = 0$, $Q_{34} = 0$, $Q_{42} = 0$, $Q_{41} = 0$; je dis que réciproquement les conditions (1) entraînent celles-ci. En effet, en vertu de $Q_{13} = 0$ et $Q_{34} = 0$, Q_{41} ou Q_{14} ne contient pas x_3; en vertu de $Q_{23} = 0$, $Q_{34} = 0$, Q_{24} ne contient pas x_3 non plus; donc $Q_{14} + x_3 Q_{24}$ ne saurait être identiquement nul si l'on n'a pas $Q_{14} = 0$, $Q_{24} = 0$.

De même, si l'on considère le groupe

$$(2)\qquad \begin{cases} Q_{12} = 0, \\ Q_{23} = 0, \qquad Q_{13} = 0, \\ Q_{34} = 0, \qquad Q_{14} + x_3 Q_{24} = 0, \\ Q_{45} = 0, \qquad Q_{15} + x_4 Q_{25} + x_4^2 Q_{35} = 0, \end{cases}$$

qui ne diffère du système (1) que par l'addition des deux dernières équations; on voit que l'on en déduit d'abord, comme tout à l'heure,

$$Q_{12} = 0, \qquad Q_{23} = 0, \qquad Q_{13} = 0, \qquad \ldots, \qquad Q_{34} = 0;$$

mais Q_{15} ne contient pas x_4, puisque Q_{14} ainsi que Q_{45} sont nuls, etc.; donc on ne saurait avoir

$$Q_{15} + x_4 Q_{25} + x_4^2 Q_{35} = 0$$

que si l'on a séparément

$$Q_{15} = 0, \qquad Q_{25} = 0, \qquad Q_{35} = 0;$$

et ainsi de suite. C. Q. F. D.

On peut encore aller plus loin et prouver que, *si l'on a seulement*

$$(3)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial x_n} = \frac{\partial P_n}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial x_n} = \frac{\partial P_n}{\partial x_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x_n} = \frac{\partial P_n}{\partial x_{n-1}},$$

l'expression

$$P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_n\,dx_n$$

sera une différentielle exacte, pourvu qu'elle le soit pour une valeur particulière a de x_n, c'est-à-dire pourvu que l'on ait

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \quad \text{pour } x_n = a. \tag{4}$$

En effet, posons

$$u = u^0 + \int_a^{x_n} P_n \, dx_n, \tag{5}$$

u^0, valeur de u pour $x_n = a$, sera fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et l'on aura $\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_n$. Or je dis que, si l'on choisit convenablement u^0, on trouvera $\frac{\partial u}{\partial x_i} = P_i$, pourvu que les relations (3) et (4) aient lieu. En effet, de (5) on tire pour $i < n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \int_a^{x_n} \frac{\partial P_n}{\partial x_i} \, dx_n,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + P_i - P_i^0 + \int_a^{x_n} \left(- \frac{\partial P_i}{\partial x_n} + \frac{\partial P_n}{\partial x_i} \right) dx_n,$$

P_i^0 désignant la valeur de P_i pour $x_n = a$, ou, en vertu de (3),

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + P_i - P_i^0;$$

on aura donc bien $\frac{\partial u}{\partial x_i} = P_i$, si $\frac{\partial u^0}{\partial x_i} = P_i^0$, c'est-à-dire si

$$P_1^0 \, dx_1 + \ldots + P_{n-1}^0 \, dx_{n-1}$$

est la différentielle d'une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

C. Q. F. D. [1]

---

[1] Cette proposition résulte aussi de la formule de Jacobi

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial Q_{ki}}{\partial x} = 0,$$

III. — Application.

Considérons l'expression

$$\left(\frac{1}{y}+z\right)dx - \frac{x}{y^2}\,dy + x\,dz;$$

cette expression est intégrable, car on a

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{y}+z\right)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{y}+z\right)}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial\left(\frac{x}{y^2}\right)}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial y}.$$

L'intégrale de cette différentielle est

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y}+z\right)dx - \int_{y_0}^{y}\frac{x_0}{y^2}\,dy + \int_{z_0}^{z} x_0\,dz + \text{const.}$$

ou

$$(x-x_0)\left(\frac{1}{y}+z\right) + \frac{x_0}{y} - \frac{x_0}{y_0} + x_0(z-z_0) + \text{const.}$$

ou enfin

$$x\left(\frac{1}{y}+z\right) + \text{const.},$$

résultat facile à vérifier par différentiation.

IV. — L'intégration d'une différentielle exacte se ramène à une seule quadrature.

L'intégrale de l'expression différentielle exacte

$$du = \mathrm{P}_1\,dx_1 + \mathrm{P}_2\,dx_2 + \ldots + \mathrm{P}_n\,dx_n$$

---

qui montre que, si Q_{jk} et Q_{ik} sont nuls, on a

$$\frac{\partial \mathrm{Q}_{ij}}{\partial x_k} = 0.$$

Q_{ij} est donc indépendant de x_k, s'il est nul pour $x_k = x_k^0$, il sera donc identiquement nul.

s'est présentée à nous sous la forme

$$(1) \qquad u = \int_{x_1^0}^{x_1} P_1\, dx_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} P_2^0\, dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} P_3^{00}\, dx_3 + \ldots,$$

P_2^0 désignant ce que devient P_2 pour $x_1 = x_1^0$; P_3^{00} ce que devient P_3 pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$; .... Mais il est clair que, si l'on avait $P_2^0 = 0$, $P_3^{00} = 0$, ..., on aurait à effectuer la seule intégration $\int_{x_1^0}^{x_1} P_1\, dx_1$; or (quoique cela ne soit pas toujours avantageux, hâtons-nous de le dire) on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi, au moyen d'un changement de variable. Posons en effet

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + (t - t_0)\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, t),\\ x_2 &= a_2 + (t - t_0)\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n &= a_n + (t - t_0)\varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, t),\end{aligned}\right.$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ et t_0 désignant des constantes arbitraires et $t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ de nouvelles variables, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des fonctions quelconques assujetties à rester finies, ainsi que leurs dérivées, pour $t = t_0$ et pour toutes les valeurs de t comprises entre t_0 et la valeur de t que nous choisirons pour la limite de nos intégrations subséquentes. Nous aurons

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1}\, d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_{n-1}}\, d\alpha_{n-1}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} du = &\left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + P_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + P_n \frac{\partial x_n}{\partial t}\right) dt\\ &+ \left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + P_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} + \ldots + P_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right) d\alpha_1\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_{n-1}} + P_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-1}} + \ldots + P_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-1}}\right) d\alpha_{n-1};\end{aligned}$$

mais, pour $t = t_0$, $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$ est nul, car $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = (t - t_0)\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j}$; donc,

pour $t = t_0$, les coefficients de $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, ... sont nuls dans la nouvelle expression de du, et l'on a simplement

$$u = \int_{t_0}^{t} \left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} dt + P_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} dt + \ldots \right),$$

ce que l'on peut écrire, sous une forme abrégée,

$$u = \int_{t_0}^{t} (P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \ldots + P_n dx_n),$$

en sous-entendant que les x sont exprimés en fonction des α et de t. La valeur de u en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'obtiendra en y remplaçant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ et t par leurs valeurs tirées de (2).

Si ce mode d'intégration par un changement variable n'est pas toujours avantageux, il met en lumière un fait important, c'est que :

Si l'expression $P_1\, dx_1 + \ldots + P_n dx_n$ *est une différentielle exacte, l'intégrale*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \ldots + P_n \frac{\partial x_n}{dt} \right) dt$$

ne dépendra que des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pour* $t = t_0$ *et* $t = t_1$ *et nullement de la forme des fonctions de* t *que l'on mettra à la place de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ce théorème est cependant soumis à de nombreuses exceptions. On conçoit en effet que l'intégrale de

$$\left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \ldots + P_n \frac{\partial x_n}{\partial t} \right) dt$$

puisse être une fonction susceptible de plusieurs valeurs comme arc tang t par exemple, bien que sa différentielle $\frac{dt}{1 + t^2}$ n'en ait qu'une seule. La forme des fonctions φ pourrait alors évidemment influer sur le résultat. Tout à l'heure nous éclaircirons ces notions par quelques exemples tirés de la Géométrie. Démontrons d'abord que, réciproquement :

Si l'expression

$$(3) \qquad u = \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{P}_1 dx_1 + \mathrm{P}_2 dx_2 + \ldots + \mathrm{P}_n dx_n)$$

ne dépend que des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pour* $t = t_0$ *et* $t = t_1$ *et nullement des fonctions de* t *mises à la place de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *l'expression* $\mathrm{P}_1 dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_n dx_n$ *est une différentielle exacte.*

En effet, tout changement de forme dans une fonction x de t peut être censé opéré au moyen de la variation d'un paramètre α; si, en effet, l'on considère l'expression

$$x = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \varphi(t) + \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} \psi(t),$$

on voit qu'elle se réduira à $\varphi(t)$ pour $\alpha = \alpha_1$ et à $\psi(t)$ pour $\alpha = \alpha_0$. Ceci posé, imaginons que, en faisant varier un paramètre α, on change la forme des fonctions x qui entrent sous le signe $\int$ dans la formule (3), on aura, en désignant par un δ les différentielles prises en faisant varier α et en laissant t constant,

$$\delta u = \int_{t}^{t_1} (\delta \mathrm{P}_1 dx_1 + \ldots + \delta \mathrm{P}_n dx_n + \mathrm{P}_1 \delta dx_1 + \ldots + \mathrm{P}_n \delta dx_n);$$

l'intégration par parties donne

$$\delta u = \sum \Big|_{t_0}^{t_1} \mathrm{P}_i \delta x_i + \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \delta \mathrm{P}_i dx_i - \sum d\mathrm{P}_i \delta x_i \right)$$

ou bien, en observant que δx_i est nul pour $t = t_0$ et $t = t_1$ si l'on veut que $x_1, x_2, \ldots$ ne subissent pas de variations pour $t = t_0$ et $t = t_1$

$$\delta u = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \delta \mathrm{P}_i dx_i - \sum d\mathrm{P}_i \delta x_i \right)$$

ou enfin

$$\delta u = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial x_j} dx_i \delta x_j - \sum \frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial x_j} dx_j \delta x_i \right)$$

ou encore

$$\delta u = \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \right) dx_i \delta x_j;$$

mais, si l'on veut que $\delta u = 0$, quelle que soit la forme des fonctions x_i, c'est-à-dire quels que soient les δx_i et les x_i, ou quels que soient les dx_i et les δx_j, il faudra que les coefficients des $\delta x_j dx_i$ soient nuls, sans quoi, s'ils étaient différents de zéro en prenant les $\delta x_j\, dx_i$ de mêmes signes que leurs coefficients, on rendrait δu positif. Donc enfin on doit avoir

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

pour l'invariabilité de la fonction u, ce qui démontre le théorème énoncé.

V. — Application de la méthode précédente.

1° Proposons-nous d'intégrer avec une seule quadrature l'expression

$$du = xy\, dz + yz\, dx + xz\, dy.$$

Si l'on observe que, pour $z = 0$, les coefficients de dx et dy sont nuls, on aura

$$u = \int_0^z xy\, dz = xyz + \text{const.}$$

La différentiation de xyz montre que l'expression donnée était bien une différentielle exacte.

2° Intégrons encore

$$(2xy + z^2)\, dx + (2zy + x^2)\, dy + (2zx + y^2)\, dz.$$

On vérifie facilement que les conditions d'intégrabilité sont satisfaites. Posons

(1) $$y = \alpha x, \qquad z = \beta x,$$

$$dy = \alpha\, dx + x\, d\alpha, \qquad dz = \beta\, dx + x\, d\beta,$$

nous aurons, pour l'expression de l'intégrale cherchée,

$$\int_0^x (3\alpha + 3\beta^2 + 3\alpha^2\beta)x^2\,dx$$

ou

$$(\alpha + \beta^2 + \alpha^2\beta)x^3 + \text{const.}$$

En remplaçant alors α et β par leurs valeurs tirées de (1), on a

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}\,\frac{z}{x}\right)x^3 + \text{const.}$$

ou

$$x^2y + z^2x + y^2z + \text{const.}$$

et l'on vérifie facilement que cette expression a pour différentielle l'expression donnée.

VI. — Intégration d'une fonction le long d'une ligne. — Théorème de Cauchy.

Considérons une expression de la forme

$$\text{P}\,dx + \text{Q}\,dy,$$

dans laquelle P et Q désignent des fonctions quelconques de x et de y; supposons que dans cette expression on fasse $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\text{P}\frac{dx}{dt} + \text{Q}\frac{dy}{dt}\right)dt$$

ou simplement

$$\int_{t_0}^{t_1}(\text{P}\,dx + \text{Q}\,dy)$$

sera ce que l'on appelle l'intégrale de $\text{P}\,dx + \text{Q}\,dy$ prise le long de la courbe dont les équations sont

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

entre les points $\varphi(t_0)$, $\psi(t_0)$ et $\varphi(t_1)$, $\psi(t_1)$.

Rien n'empêche d'ailleurs de supposer $t = x$, et c'est ce que l'on fait souvent.

Pour éclaircir ces notions, proposons-nous d'intégrer l'expression

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

tout le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à un. Les équations de ce cercle sont

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t;$$

l'intégrale demandée sera donc, en tournant dans le sens direct [1],

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

On aurait aussi pu poser $y = \sqrt{1 - x^2}$, on aurait eu

$$2\int_{+1}^{-1}\left(\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right)dx = 2\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi.$$

En vertu de la remarque faite au paragraphe précédent, on pourra dire que, si $P\,dx + Q\,dy$ est une différentielle exacte, son intégrale prise entre deux points fixes ne variera pas, en général, avec la forme du contour d'intégration. Mais il importe de donner une démonstration rigoureuse de cette proposition et de préciser les cas dans lesquels elle tombe en défaut.

Soit

$$u = \int_{t_0}^{t} (P\,dx + Q\,dy)$$

l'intégrale de la différentielle $P\,dx + Q\,dy$, prise entre deux points fixes le long d'un certain contour; supposons que l'on fasse varier infiniment peu le contour d'intégration sans changer les extrémités, c'est-à-dire les limites t_0 et t, on peut toujours supposer, comme on l'a déjà expliqué, que le changement de forme produit dans le contour d'intégration, et qui provient du changement de forme des fonctions x

[1] Celui dans lequel on compte les angles positifs en Trigonométrie.

et y de t, vient de ce que l'on a fait varier infiniment peu un paramètre α contenu dans x et dans y, paramètre indépendant de t; la variation subie par u, et que nous appellerons δu, est alors la différentielle de u relative à ce paramètre, et l'on a

$$\begin{aligned}\delta u &= \int_{t_0}^{t} (\delta \mathrm{P}\, dx + \delta \mathrm{Q}\, dy + \mathrm{P}\, \delta\, dx + \mathrm{Q}\, \delta\, dy)\\ &= \int_{t_0}^{t} \left[\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\, \delta y\right) dx \right.\\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\, \delta y\right) dy + \mathrm{P}\, \delta\, dx + \mathrm{Q}\, \delta\, dy \right]\end{aligned}$$

ou, en intégrant par parties,

$$\delta u = \Big|_{t_0}^{t} (\mathrm{P}\, \delta x + \mathrm{Q}\, \delta y) + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right) (\delta y\, dx - \delta x\, dy);$$

mais δx et δy sont nuls aux limites, et par hypothèse $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}$ est égal à $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$: donc δu est nul. Seulement, pour que cette conclusion soit juste, il faut que ni P ni Q ni leurs dérivées ne deviennent infinies ou mal déterminées sous le signe $\int$, c'est-à-dire dans le voisinage du contour d'intégration.

δu étant nul, u reste constant; mais il ne reste constant que si le contour d'intégration, en se déformant, ne passe jamais par un point (x, y) rendant infinies ou mal déterminées les fonctions P, Q ou leurs dérivées. Donc :

L'intégrale d'une différentielle exacte $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ *prise entre des limites données, le long de deux chemins différents, prend des valeurs égales, pourvu que l'on puisse en déformant le premier chemin le faire coïncider avec le second sans lui faire franchir de points pour lesquels* P, Q *ou leurs dérivées cesseraient d'être finies et bien déterminées.*

Par exemple, deux chemins formant un contour fermé, limitant une aire non trouée, à l'intérieur de laquelle les

fonctions P et Q ou leurs dérivées ne deviennent ni infinies ni mal déterminées, fournissent la même valeur de l'intégrale u de $P\,dx + Q\,dy$.

On déduit de là un théorème important de Cauchy, qui sert de base à la théorie générale des fonctions : supposons que $f(z) = X + Y\sqrt{-1}$ soit une fonction de $z = x + y\sqrt{-1}$, ayant une dérivée unique; alors on a, comme on l'a vu (t. I, p. 185),

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

et les expressions

$$dv = X\,dy + Y\,dx, \qquad du = X\,dx - Y\,dy$$

sont des différentielles exactes; il en est de même de

$$\begin{aligned} du + dv\sqrt{-1} &= (X\,dy + Y\,dx)\sqrt{-1} + (X\,dx - Y\,dy) \\ &= (X + Y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire de $f(z)\,dz$. Ainsi $f(z)\,dz$ est une différentielle exacte; donc :

Théorème de Cauchy. — *L'intégrale de la différentielle $f(z)\,dz$ prise entre deux points fixes, le long de deux contours quelconques passant par ces points, a la même valeur, pourvu que l'on puisse passer d'un contour à l'autre en le déformant d'une manière continue, sans lui faire franchir de point pour lequel $f(z)$ ou $f'(z)$ cesseraient d'être bien déterminées ou finies.*

Nous ferons encore une remarque, avant d'abandonner ce sujet : on sait qu'un grand nombre de fonctions de variables imaginaires $X + Y\sqrt{-1}$ de $x + y\sqrt{-1}$ ont une dérivée unique. Chacune de ces fonctions fournit alors deux différentielles exactes $X\,dx - Y\,dy$ et $X\,dy + Y\,dx$.

Prenons, par exemple, la fonction $\log z = \log(x + y\sqrt{-1})$: elle est égale à

$$\log\sqrt{x^2 + y^2} + \text{arc tang}\,\frac{y}{x}\sqrt{-1}.$$

Ces expressions

$$\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx - \text{arc tang}\frac{y}{x}\,dy = du,$$
$$\log\sqrt{x^2+y^2}\,dy + \text{arc tang}\frac{y}{x}\,dx = dv$$

sont donc des différentielles exactes, ce que l'on peut vérifier directement. $\log z$ est la dérivée de $z\log z - z$ ou de $(x+y\sqrt{-1})\left(\log\sqrt{x^2+y^2}+\text{arc tang}\frac{y}{x}\sqrt{-1}-1\right)$ ou de

$$x\log\sqrt{x^2+y^2} - y\,\text{arc tang}\frac{y}{x} - x$$
$$+\sqrt{-1}\left(y\log\sqrt{x^2+y^2}+x\,\text{arc tang}\frac{y}{x}-y\right),$$

qui est $u+v\sqrt{-1}$; on a donc

$$d\left(x\log\sqrt{x^2+y^2}-y\,\text{arc tang}\frac{y}{x}-x\right)=\log\sqrt{x^2+y^2}\,dx-\text{arc tang}\frac{y}{x}\,dy,$$
$$d\left(y\log\sqrt{x^2+y^2}+x\,\text{arc tang}\frac{y}{x}-y\right)=\log\sqrt{x^2+y^2}\,dy+\text{arc tang}\frac{y}{x}\,dx,$$

ce qu'il est facile de vérifier.

VII. — Interprétation géométrique des conditions d'intégrabilité.

Pour que l'expression

$$(1)\qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

soit une différentielle exacte, il faut que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Or, si nous regardons dx, dy, dz comme les composantes du déplacement d'un point, $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ sera proportionnel au cosinus de l'angle des directions P, Q, R et dx, dy, dz, de sorte que, si

$$(3)\qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

ces deux directions seront rectangulaires. Soit

$$\varphi(x, y, z)$$

l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$; si l'on égale la fonction φ à une constante, on obtiendra une famille de surfaces qui pourra aussi être représentée par (3), et alors ces surfaces seront normales aux directions P, Q, R.

Les équations (2) expriment donc qu'il existe une surface normale, ou plutôt une famille de surfaces normales aux directions P, Q, R menées par les points x, y, z.

Il n'existe pas toujours une surface normale à un faisceau de droites, telles qu'il en passe une par chaque point de l'espace ; cherchons la condition pour qu'il en soit ainsi. Soient

$$(4)\qquad x = x_0 + a\rho,\qquad y = y_0 + b\rho,\qquad z = z_0 + c\rho$$

les équations d'un faisceau de droites ; on peut supposer que les points x_0, y_0, z_0 soient situés sur une surface, et de ces points alors émaneront les droites du faisceau ; a, b, c seront leurs cosinus directeurs et ρ sera la distance du point (x, y, z) au point (x_0, y_0, z_0).

S'il existe une surface normale au faisceau, on aura, en supposant que (x, y, z) soit un point de la surface,

$$(5)\qquad a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0.$$

Or de (4) on tire

$$dx = dx_0 + a\,d\rho + \rho\,da,$$
$$dy = dy_0 + b\,d\rho + \rho\,db,$$
$$dz = dz_0 + c\,d\rho + \rho\,dc;$$

portant ces valeurs dans (5), on a

$$(6)\qquad a\,dx_0 + b\,dy_0 + c\,dz_0 + d\rho = 0;$$

en observant que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad \text{et que} \qquad a\,da + b\,db + c\,dc = 0,$$

de (6) on déduit

$$(7)\qquad -d\rho = a\,dx_0 + b\,dy_0 + c\,dz_0,$$

pour déterminer ρ; mais dx_0, dy_0, dz_0 étant arbitraires, pour que la fonction ρ existe, il faut que le second membre de l'expression précédente soit une différentielle exacte; donc il faut que

$$\frac{\partial a}{\partial y_0} = \frac{\partial b}{\partial x_0}, \qquad \frac{\partial b}{\partial z_0} = \frac{\partial c}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial c}{\partial x_0} = \frac{\partial a}{\partial z_0}.$$

Si ces formules sont identiques, l'équation (7) fera connaître ρ et les équations (4) détermineront les x, y et z d'un point quelconque de la surface, qui contiendra dans son équation une constante arbitraire.

VIII. — Conditions pour qu'une expression soit une dérivée.

Supposons que l'on donne une expression de la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots),$$

y désignant une fonction de x et y', y'', ... ses dérivées; on peut se demander si l'expression précédente peut être la dérivée d'une autre expression, telle que

$$f(x, y, y', y'', \ldots),$$

de forme donnée, quel que soit y. Je m'explique :

$2yy'$ est la dérivée de y^2, quelle que soit la fonction y : y'^2, par exemple, est bien la dérivée d'une fonction de x, mais cette fonction dépend de la forme de y et il n'existe pas de fonction de x et y qui, différentiée, donne y'^2, quel que soit y, la dérivée de $\psi(x, y)$ ne pouvant contenir y' au second degré.

Si la fonction F est la dérivée d'une fonction f de forme donnée, on devra avoir

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots)\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots);$$

et, si l'on se donne y, y', y'', ... pour $x = x_0$ et $x = x_1$, l'intégrale qui figure dans cette formule devra rester la même,

quelle que soit d'ailleurs la forme de la fonction y; faisons donc varier la fonction y, et cela, comme plus haut (p. 207), en imaginant que cette fonction contienne des paramètres variables $\alpha, \alpha', \ldots$. En convenant de représenter par un δ les différentielles totales prises par rapport à $\alpha, \alpha', \ldots$ et laissant x constant, on aura

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta F\,dx,$$

et, en posant

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = Y', \qquad \ldots,$$

il viendra

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (Y\,\delta y + Y'\,\delta y' + Y''\,\delta y'' + \ldots)\,dx.$$

Or on a

$$\int_{x_0}^{x_1} Y'\,\delta y'\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1} Y'\,\delta y - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dY'}{dx}\,\delta y\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} Y''\,\delta y''\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1} Y''\,\delta y' - \Big|_{x_0}^{x_1} \frac{dY''}{dx}\,\delta y + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2Y''}{dx^2}\,\delta y\,dx,$$

. . . . :

la formule précédente devient alors, en observant que δy, $\delta y'$, ... sont nuls pour $x = x_0$ et $x = x_1$,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta y\,dx \left[Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \ldots \right].$$

Or $\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx$ doi têtre nul : donc le coefficient de δy sous le signe $\int$ doit être nul, sans quoi, δy étant arbitraire, on pourrait le choisir de même signe que son coefficient et l'intégrale du second membre serait essentiellement positive. La condition cherchée est donc

$$(1) \qquad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \frac{d^3Y'''}{dx^3} + \ldots = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\mathrm{Y} - \left(\frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial y} y' + \frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial y'} y'' + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

et cette formule doit être une identité, c'est-à-dire avoir lieu quel que soit y et, par suite, quels que soient y, y', y'', ... pour toute valeur donnée de x.

Réciproquement, lorsque l'équation (1) est satisfaite, il existe une fonction $f(x, y, y', \ldots)$ ayant pour dérivée $\mathrm{F}(x, y, y', \ldots)$, quelle que soit la forme de y. En effet, l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\, dx$$

ne dépendant absolument que des valeurs y, y', y'', ... pour $x = x_1$ et $x = x_0$, sa dérivée relative à x_1 sera $\mathrm{F}(y_1, y'_1, y''_1, \ldots)$ en appelant y_1, y'_1, ... les valeurs de y, y', ... pour $x = x_1$. Cela revient bien à dire que la dérivée de l'intégrale est F, quelle que soit la forme de y.

Sans qu'il soit nécessaire de faire de nouveaux calculs, on voit que, y, z, ... désignant des fonctions de x, y', y'', ... et z', z'', ... leurs dérivées, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{F}(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots, y'', z'', \ldots)$ soit la dérivée d'une expression $f(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$, quelles que soient les formes de y, z, ..., est que l'on ait

$$\mathrm{Y} - \frac{d\mathrm{Y}'}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Y}''}{dx^2} - \ldots = 0, \qquad \mathrm{Z} - \frac{d\mathrm{Z}'}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Z}''}{dx^2} - \ldots = 0,$$

formules dans lesquelles on a posé

$$\mathrm{Y} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}, \qquad \mathrm{Y}' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}, \qquad \ldots.$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}, \qquad \mathrm{Z}' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}, \qquad \ldots.$$

IX. — Intégration.

On déduit du calcul des variations une méthode fort simple pour la recherche de la fonction qui a pour dérivée

$$\mathrm{F}(x, y, y', \ldots),$$

quand on a reconnu que cette fonction existe; nous l'exposerons plus loin. En attendant, nous ferons connaître deux autres méthodes : l'une, due à M. Bertrand (XXVIII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*), permet de reconnaître si une fonction est intégrable; nous allons l'exposer tout d'abord.

Soit à intégrer l'expression déjà considérée

$$F(x, y, y', \ldots, y^n);$$

soit

$$f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

son intégrale. Si elle existe, on devra avoir

$$F(x, y, y', \ldots, y^n) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{n-1}} y^n.$$

Cette formule montre que F doit contenir y^n au premier degré; si cette condition n'est pas remplie, F n'est pas intégrable, quel que soit y. Supposons donc F de la forme $P + Qy^n$, P et Q ne contenant pas y^n; alors

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y^{n-1}}$$

et

$$f = \int Q\, dy^{n-1} + R,$$

R désignant une fonction de $x, y, y', \ldots, y^{n-2}$. Soit

$$\int Q\, dy^{n-1} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{n-1}),$$

alors on a

$$f = \varphi(x, y, \ldots) + R$$

et, en différentiant,

$$P + Qy^n = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{n-1}} y^n + \frac{dR}{dx}.$$

Supprimant les termes en y^n qui se détruisent, il vient

$$\frac{dR}{dx} = P - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial \varphi}{\partial y^{n-2}} y^{n-1},$$

et l'on est ramené à l'intégration d'une fonction $\frac{dR}{dx}$ qui ne contient plus la dérivée d'ordre n; elle devra être linéaire en y^{n-1}, sinon F n'est pas intégrable, quel que soit y, et ainsi de suite.

Soit, par exemple, à intégrer

$$y''(y + 2xy') + 2y'^2 = \frac{dF}{dx};$$

on a

$$P = 2y'^2, \qquad Q = y + 2xy',$$

$$f = \int (y + 2xy')\,dy' + R,$$

$$f = yy' + xy'^2 + R.$$

Différentiant et comparant avec l'expression proposée, on a

$$y''(y + 2xy') + 2y'^2 = yy'' + y'^2 + y'^2 + 2xy'y'' + \frac{dR}{dx},$$

$$\frac{dR}{dx} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad R = \text{const.}$$

et, par suite,

$$f = yy' + xy'^2 + \text{const.}$$

est l'intégrale demandée, comme on peut le vérifier.

Voici une autre méthode qui suppose que l'on s'est préalablement assuré que l'expression à intégrer est une dérivée, quel que soit y.

Dans l'expression $F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]$ on remplace y par une fonction quelconque de x contenant n paramètres a_1, a_2, ..., a_n; on intègre alors F par rapport à x en laissant $a_1, a_2, \ldots$ constants; des équations

$$y = \varphi(a_1, a_2, \ldots, x),$$

$$y' = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \qquad \ldots, \qquad y^{n-1} = \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}},$$

on tire $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en fonction de $x, y, y', \ldots, y^{n-1}$; on porte les valeurs dans le résultat de l'intégration et l'on a ainsi la fonction dont F est la dérivée. En effet, cette fonction ne peut dépendre que des valeurs de y, y', y'', ...

pour $x = x_0$ et $x = x_1$; si donc les paramètres $a_1, a_2, \ldots$ sont assez nombreux pour que l'on puisse assigner à y, $y', \ldots, y^{n-1}$ des valeurs déterminées pour $x = x_1$, l'intégrale trouvée sera l'intégrale de F, quels que soient $a_1, a_2, \ldots$, c'est-à-dire quels que soient $y_1, y'_1, \ldots$, ou quels que soient $y, y', \ldots$. Si, par exemple, on veut intégrer la fonction $F = y''(y + 2xy') + 2y'^2$, on fera $y = ax^2 + b$; on aura alors $F = 18a^2x^2 + 2ab$, dont l'intégrale est

$$\frac{6x^3}{3} a^2 + 2abx + \text{const.};$$

si l'on tire a et b de $y = ax^2 + b$, $y' = 2ax$ pour les porter dans cette expression, on trouve $yy' + xy'^2 + \text{const.}$

X. — Condition pour qu'une fonction soit une dérivée d'ordre supérieur au premier.

Il est facile de trouver la condition pour qu'une expression de la forme $F(x, y, y', \ldots)$ soit une dérivée seconde, troisième, etc., quel que soit y.

Par exemple, cherchons la condition pour que F soit une dérivée seconde, on a

$$(1) \qquad \int\int F\,dx^2 = x\int F\,dx - \int xF\,dx;$$

or il faut que F soit une dérivée, ce qui exige d'abord que

$$(2) \qquad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} + \ldots = 0.$$

Cette condition étant satisfaite, il faut que, en vertu de (1), $\int xF\,dx$ soit une dérivée; donc

$$\frac{\partial}{\partial y}(xF) - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(xF) + \ldots = 0$$

ou, si l'on veut,

$$xY - \frac{d}{dx}xY' + \ldots = 0,$$

ou enfin, en tenant compte de (2),

$$Y' - 2\frac{dY''}{dx} + \ldots = 0.$$

Les conditions pour que F soit une dérivée troisième s'obtiendront en observant que

$$\int\int\int F\,dx^3 = x^2\int F\,dx - 2x\int xF\,dx + \int x^2 F\,dx,$$

et en écrivant que F, xF et x^2F sont des dérivées, et ainsi de suite.

EXERCICES ET NOTES.

1. Constater que

$$e^x[(x\cos y - y\sin y)dx - (y\cos y + x\sin y)dy]$$

est une différentielle exacte et trouver la fonction dont cette expression est la différentielle.

2. $$\frac{(x^2 - y^2)dx + xy\,dy}{x^3 + yx^2 + y^2x}$$

est une différentielle exacte; trouver de quelle fonction.

3. $$\frac{(x + y)^2dx + (x - y)^2dy}{x^3 + 3x^2y - y^2x + y^3}$$

est une différentielle exacte; trouver de quelle fonction.

4. L'expression

$$dy(x + x^3) - dx(y - 3x^2y)$$

devient une différentielle exacte quand on la multiplie par une certaine fonction de x; trouver cette fonction.

5. $$\left[2y'' - \frac{(2y'''x + y'')(1 - y')}{y''^2x}\right]\frac{1}{\sqrt{x}}$$

est la dérivée d'une fonction dont on demande l'expression algébrique.

6. Étant donnée une famille de courbes

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \psi(x, y, z, a, b) = 0,$$

trouver la condition pour qu'il existe une surface normale à ce faisceau de courbes.

7. Les expressions suivantes sont des différentielles exactes; on demande de les intégrer :

$$\Omega[(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz],$$
$$\Omega[(z^2 - xy)dx + (x^2 - yz)dy + (y^2 - xz)dz],$$
$$\Omega[(y^2 - xz)dx + (z^2 - xy)dy + (x^2 - yz)dz],$$

Ω désignant la quantité définie par l'équation

$$\frac{1}{\Omega} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

8. La fonction entière $f(x + iy + i^2 z)$ étant divisée par $i^3 - 1$ donne un reste de la forme

$$X + Yi + Zi^2;$$

démontrer que

$$X\,dx + Y\,dz + Z\,dy,$$
$$X\,dz + Y\,dy + Z\,dx,$$
$$X\,dy + Y\,dx + Z\,dz$$

sont des différentielles exactes de fonctions P, Q, R. Les surfaces P = const., Q = const., R = const. se coupent deux à deux au même point sous le même angle.

9. Le lecteur pourra considérablement étendre le domaine de la théorie de l'hyperespace; il pourra, par exemple, faire une théorie des contacts et de la courbure pour les variétés de toutes les dimensions.

CHAPITRE VI.

INTÉGRALES DÉFINIES PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES ET RÉSIDUS DE CAUCHY.

---

§ I. — Fonctions monogènes.

Nous avons appelé fonction de $x + y\sqrt{-1}$ toute expression de la forme $X + Y\sqrt{-1}$, dans laquelle X et Y désignent des fonctions réelles de x et de y (t. I, p. 6); nous avons vu que toutes les fonctions de $x + y\sqrt{-1}$ n'ont pas une dérivée bien déterminée. En effet, la dérivée de $X + Y\sqrt{-1}$ est la valeur du rapport

$$\frac{dX + dY\sqrt{-1}}{dx + dy\sqrt{-1}} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)}{dx + dy\sqrt{-1}},$$

qui dépend en général de la valeur arbitraire de $\frac{dy}{dx}$, et, pour que cette dérivée en soit indépendante, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

équation qui revient aux deux suivantes que nous avons déjà trouvées (t. I, p. 186)

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Lorsque ces conditions (1) sont identiquement satisfaites, on dit avec Cauchy que la fonction $X + Y\sqrt{-1}$ est *monogène*.

Comme l'on ne considère guère que des fonctions mono-

gènes, on sous-entend le plus souvent cette épithète; dans ce qui va suivre, nous ne considérerons jamais que des fonctions monogènes.

Rappelons que les équations (1) expriment que

$$X\,dx - Y\,dy \quad \text{et} \quad X\,dy + Y\,dx$$

sont des différentielles exactes; il en résulte que

$$X\,dx - Y\,dy + \sqrt{-1}(X\,dy + Y\,dx)$$

ou

$$(X + Y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})$$

est aussi une différentielle exacte, et de là découle un théorème important de Cauchy démontré plus haut et dont nous ferons une application continuelle dans ce Chapitre, après en avoir donné une nouvelle démonstration.

Pour comprendre les théories que nous allons exposer, il est nécessaire de bien se pénétrer des notions exposées dans les premiers paragraphes du Chapitre VIII (t. I) et aux pages 6, 7 et 8 de l'Introduction que nous n'avons fait que résumer dans les lignes que l'on vient de lire.

§ II. — Fonctions monodromes.

Une fonction est dite *monodrome*, à l'intérieur d'une aire C, lorsque, sa variable cheminant d'une manière quelconque à l'intérieur de cette aire, la fonction reprend constamment les mêmes valeurs aux mêmes points.

Une fonction à la fois monodrome, monogène, finie et continue à l'intérieur d'une aire C, est dite *synectique* [1] à l'intérieur de cette aire (Cauchy).

Une fonction bien définie, c'est-à-dire qui n'a jamais qu'une seule valeur pour une même valeur de sa variable, telle qu'un polynôme entier, est évidemment monodrome

---

[1] On dit quelquefois *holomorphe* au lieu de synectique. Nous ne voyons pas pourquoi l'on changerait les dénominations de Cauchy.

dans toute l'étendue du plan; mais, pour mieux faire saisir le sens que nous attachons au mot *monodrome*, nous allons donner quelques exemples de fonctions simples non monodromes.

III. — Exemples des fonctions non monodromes.

Considérons, par exemple, la fonction $\log z$ ou, en posant $z = x + y\sqrt{-1} = re^{\theta\sqrt{-1}}$, la fonction

$$\log z = \log r + \theta\sqrt{-1}.$$

Elle n'est pas monodrome à l'intérieur d'un cercle, décrit de l'origine comme centre; et, en effet, faisons parcourir au point $x + y\sqrt{-1} = re^{\theta\sqrt{-1}}$ une circonférence de rayon r, on aura toujours $\log z = \log r + \theta\sqrt{-1}$; $\log r$ restera constant, mais θ ira toujours en croissant si, par exemple, le point z décrit le cercle dans le sens où l'on compte les angles en Trigonométrie; quand le point z aura décrit la circonférence tout entière, θ aura crû de 2π, et, le point z revenu au point de départ, $\log z$ aura crû de $2\pi\sqrt{-1}$: $\log z$ ne reprendra donc pas toujours aux mêmes points la même valeur; $\log z$ n'est pas monodrome à l'intérieur d'un contour fermé contenant l'origine.

Argument de $z - a$. — Considérons l'argument de la fonction linéaire $z - a$, a désignant une constante, comme une fonction de z, et proposons-nous de déterminer les régions du plan dans lesquelles elle est monodrome, et dans lesquelles elle ne l'est pas. Marquons les points a et z; la droite az représentera l'imaginaire $z - a$, sa longueur (t. I, p. 7) sera le module de $z - a$, l'angle qu'elle fait avec l'axe Ox sera l'argument de $z - a$. Le module de $z - a$, considéré comme fonction de $z - a$, reprend donc toujours la même valeur quand z occupe le même point du plan, puisqu'il est bien défini quand on se donne a et z. L'argument de $z - a$, au contraire, n'est pas bien défini, quand on se donne simple-

ment le point z et le point a; il n'est défini qu'à un multiple de 2π près.

1° Supposons d'abord (*fig.* 13) que le point z décrive le

Fig. 13.



contour d'une aire MM'N, ne contenant pas dans son intérieur le point a ou même une courbe quelconque contenue dans cette aire, l'angle que fait az avec ox va aller d'abord, soit en croissant, soit en décroissant; il pourra subir plusieurs alternatives de croissance et de décroissance (dont l'amplitude pourra même dépasser 2π); mais, en définitive, quand le point z reviendra au point de départ, l'angle que az fait avec ox ou l'argument de $z - a$ aura repris sa valeur primitive; les lignes aM et aM' déterminent ses valeurs maxima et minima.

2° Supposons, au contraire (*fig.* 14), que le point z décrive un contour fermé ABC, contenant dans son intérieur le

Fig. 14.



point a, il est bien clair que, si le point z chemine toujours

dans le même sens, la droite az aura décrit un angle égal à 2π quand le point z sera revenu au point de départ. L'argument de $z - a$ aura varié de 2π.

De cette discussion on peut conclure que, si le point z décrit une ligne quelconque à l'intérieur d'un contour fermé ne contenant pas le point a, l'argument de $z - a$ reprendra toujours aux mêmes points la même valeur; il n'en sera pas de même si le point a est contenu dans un contour fermé; en d'autres termes :

L'argument de $z - a$ variant d'une manière continue est monodrome à l'intérieur des aires ne contenant pas le point a; il n'est pas monodrome à l'intérieur des aires contenant ce point, et croît en général de $\pm 2\pi$ quand le point z effectue une révolution autour du point a, dans le sens positif ou dans le sens négatif. (Nous prenons pour sens positif celui dans lequel croissent les angles en Trigonométrie; quand un point décrit un contour fermé, le sens positif est celui dans lequel l'observateur, suivant le mouvement du point, aurait l'aire limitée par le contour à sa gauche.)

Étude de la fonction $\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}$. — Cette fonction n'étant définie qu'au signe près, il y a lieu d'examiner si elle est monodrome; nous supposerons a, b, ..., l constants.

Nous avons

$$\operatorname{mod}\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots} = \sqrt{\operatorname{mod}(z-a)}\sqrt{\operatorname{mod}(z-b)}\ldots;$$

par conséquent, comme, dans le second membre, les radicaux doivent être pris avec le signe $+$, le module de notre fonction reprend toujours aux mêmes points z la même valeur. On a aussi

$$(1)\quad \arg\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots} = \tfrac{1}{2}\arg(z-a) + \tfrac{1}{2}\arg(z-b) + \ldots;$$

supposons que le point z reste compris à l'intérieur d'une aire C. Si ce contour ne contient aucun des points a, b, c, ..., chacun des arguments $\frac{1}{2}\arg(z-a)$, $\frac{1}{2}\arg(z-b)$, ..., re-

prendra aux mêmes points la même valeur; donc *la fonction considérée est monodrome à l'intérieur de l'aire* C, puisqu'elle possède à l'intérieur de cette aire, au même point, toujours le même module et le même argument, c'est-à-dire la même valeur.

Si l'aire C contient un des points a, b, c, . . . seulement, le point a par exemple, et si le point z décrit une révolution autour de ce point, l'argument de $z-a$ croît de $\pm 2\pi$, et, en vertu de (1), l'argument de la fonction croît de $\pm\pi$ suivant que le point z a marché dans le sens direct ou indirect, la fonction revient au point de départ avec un signe opposé à celui qu'elle avait primitivement. Donc :

La fonction n'est pas monodrome à l'intérieur des aires contenant l'un des points a, b, c, ...

Si l'aire C contenait plusieurs points a, b, c, . . . , il est clair que la fonction ne serait pas monodrome à l'intérieur de cette aire et que, d'une manière générale, si le point z décrit un contour fermé contenant dans son intérieur n des points a, b, c, . . . , l'argument de la fonction croît après une révolution du point z de la quantité $\pm n\pi$ et, par conséquent, la fonction revient au point de départ avec sa valeur primitive multipliée par $(-1)^n$.

On étudierait d'une façon analogue la fonction

$$\sqrt[3]{(z-a)(z-b)\ldots}\ ,$$

et l'on verrait que, quand le point z décrit un contour fermé contenant le point a par exemple, la fonction se trouve multipliée ou divisée par $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$ . . . .

IV. — Application des considérations précédentes à la fonction logarithmique.

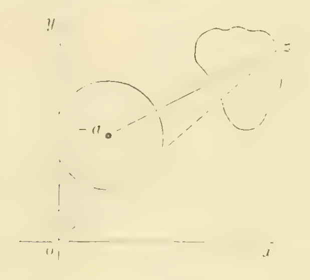
Bien que la théorie générale des fonctions non monodromes doive être faite plus loin, nous étudierons encore la fonction

$\log(a+z)$, laquelle est égale à

$$\log \operatorname{mod}(a+z)+\sqrt{-1}\arg(a+z).$$

Marquons les points $-a$ et z dans le plan ; la droite $\overline{-az}$

Fig. 15.



représentera l'imaginaire $a+z$ et, en appelant r sa longueur, θ l'angle qu'elle fait avec l'angle des x, on aura

$$\log(a+z)=\log r+\theta\sqrt{-1}.$$

Imaginons alors que le point z décrive un contour fermé ne contenant pas le point $-a$, tel que celui qui est tracé sur la *fig.* 15, l'angle θ variera ainsi que r ; mais, quand z reviendra au point de départ, r et θ reprendront leurs valeurs primitives ; $\log(a+z)$ est donc monodrome à l'intérieur de ce contour, car on pourrait dire la même chose de tout contour fermé intérieur à celui-ci.

Si, au contraire, le point z tourne autour de $-a$, par exemple décrit un cercle autour de $-a$, l'argument θ varie de 2π ou de -2π suivant le sens dans lequel z tourne, et, le point z revenant au point de départ, $\log(a+z)$ a crû ou décru de $2\pi\sqrt{-1}$. Ainsi *la fonction* $\log(a+z)$ *est monodrome à l'intérieur de toute aire ne contenant pas le point* $-a$, *et, si le point* z *décrit un contour fermé contenant le point* $-a$, *la fonction augmente ou diminue de* $2\pi\sqrt{-1}$ *quand le point* z *revient au point de départ, après avoir tourné dans le sens direct ou rétrograde.*

Ce résultat est à retenir ; nous en ferons bientôt usage.

IV. — Intégrales des fonctions imaginaires.

Intégrer une expression, telle que $f(x,y)\,dx + F(x,y)\,dy$ le long d'un contour donné, entre les points (x_0, y_0) et (X, Y), c'est calculer l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} [f(x,y)\,dx + F(x,y)\,dy],$$

en remplaçant y par sa valeur en fonction de x tirée de l'équation du contour. Le contour peut être représenté par deux équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

si l'on appelle alors t_0 et T les valeurs de t pour $x = x_0$ et $x = X$, l'intégrale (1) pourra se mettre sous la forme

$$\int_{t_0}^{T} [f(\varphi, \psi)\varphi'(t) + F(\varphi, \psi)\psi'(t)]\,dt.$$

Si, en particulier, on considère la fonction

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = X + Y\sqrt{-1},$$

l'expression $(X + Y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})$ pourra être intégrée le long d'un contour déterminé.

Nous appellerons *intégrale de* $f(z)\,dz$ ou de $f(z)$ prise le long d'un contour donné l'intégrale de

$$(X + Y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})$$

prise le long de ce contour.

Ainsi, pour avoir l'intégrale de $f(z)$ entre les limites t_0 et T le long du contour qui a pour équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

on formera l'expression

$$\int_{t_0}^{T} f(\varphi + \psi\sqrt{-1})[\varphi'(t) + \sqrt{-1}\,\psi'(t)]\,dt.$$

Pour éclaircir ces notions, nous allons traiter quelques exemples :

1° *Intégrer $z^2\,dz$ le long d'une droite de longueur 1, issue de l'origine et faisant un angle de 45° avec l'axe des x.*

On a

$$z^2\,dz = (x + y\sqrt{-1})^2(dx + dy\sqrt{-1}).$$

Les équations de la droite sont

$$x = r\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y = r\frac{\sqrt{2}}{2};$$

r désignant la distance à l'origine du point (x, y), on aura

$$dx = dr\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad dy = dr\frac{\sqrt{2}}{2},$$

donc

$$z^2\,dz = \frac{r^2}{4}(1 + \sqrt{-1})^3\,dr\sqrt{2};$$

l'intégrale cherchée sera

$$\frac{(1 + \sqrt{-1})^3}{4}\sqrt{2}\int_0^1 r^2\,dr = \frac{\sqrt{2}}{12}(1 + \sqrt{-1})^3.$$

2° *Intégrer le long d'une ellipse ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la fonction $\sqrt{z}\,dz$.

Les équations de l'ellipse sont, si l'on veut,

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi;$$

on aura donc

$$\sqrt{z}\,dz = \sqrt{a\cos\varphi + \sqrt{-1}\,b\sin\varphi}\,(b\cos\varphi\sqrt{-1} - a\sin\varphi)\,d\varphi;$$

quand le point z ou (x, y) décrit l'ellipse, φ varie de 0 à 2π : l'intégrale cherchée sera donc

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a\cos\varphi + \sqrt{-1}\,b\sin\varphi}\,(b\cos\varphi\sqrt{-1} - a\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3° *Intégrons encore dz le long d'un cercle de rayon* R *décrit de l'origine comme centre.*

Les équations de ce cercle sont, en appelant θ l'angle que fait le rayon vecteur du point décrivant avec l'axe des x,

$$x = \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y = \mathrm{R}\sin\theta;$$

on a

$$z = x + y\sqrt{-1} = \mathrm{R}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}},$$

$$dz = \mathrm{R}\sqrt{-1}\,e^{\theta\sqrt{-1}}d\theta.$$

Quand le point z décrit le cercle, θ varie de o à 2π par exemple; il faut donc intégrer entre ces limites, et l'intégrale cherchée est

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{R}\sqrt{-1}\,e^{\theta\sqrt{-1}}d\theta = \mathrm{R}\sqrt{-1}\int_0^{2\pi}e^{\theta\sqrt{-1}}d\theta = 0.$$

4° *Supposons enfin que l'on demande l'intégrale de $f(z)dz$ le long d'un segment de l'axe des x, dont les extrémités ont pour abscisses x_0 et* X.

Ici $z = x$ et x varie de x_0 à X; on a donc $dz = dx$ et, par suite, l'intégrale cherchée est

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx.$$

L'intégrale $\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} f(z)dz$ de $f(z)$ prise entre les limites z_0 et Z *le long d'un contour donné est la limite vers laquelle tend l'expression*

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(\mathrm{Z} - z_{n-1}),$$

$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ désignant des points indéfiniment rapprochés sur le contour et situés les uns à la suite des autres; on s'en assure facilement en remplaçant $z_0, z_1, z_2, \ldots$ par $x_0 + y_0\sqrt{-1}$, $x_1 + y_1\sqrt{-1}$, $x_2 + y_2\sqrt{-1}$, ...

Il est clair que, si l'on a

$$au + bv + cw + \ldots = f(z),$$

a, b, c, ... désignant des constantes, on aura encore, en intégrant le long d'un contour donné,

$$a\int_{z_0}^{Z} u\,dz + b\int_{z_0}^{Z} v\,dz + \ldots = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

Nous verrons bientôt qu'en général une intégrale telle que $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ est une fonction de sa limite supérieure Z, admettant la dérivée bien déterminée $f(Z)$.

Nous démontrerons encore un théorème qui nous sera utile dans la suite :

Théorème. — *Si l'on désigne par* M *le module maximum de la fonction* $f(z)$ *sur le contour* $z_0 z Z$, *et par* s *la longueur de ce contour, l'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *prise le long du contour en question aura un module moindre que* Ms.

En effet, appelons σ la longueur d'une portion $z_0 z$ du contour comptée à partir du point z_0, et I la valeur de l'intégrale, on aura

$$I = \int_0^s f(x + y\sqrt{-1})\left(\frac{dx}{d\sigma} + \sqrt{-1}\,\frac{dy}{d\sigma}\right)d\sigma.$$

Or soient R le module de $f(x+y\sqrt{-1})$, Θ son argument, le module de $\dfrac{dx + dy\sqrt{-1}}{d\sigma}$ est un ; soit α son argument, on aura

$$I = \int_0^s \mathrm{R}\,e^{(\Theta+\alpha)\sqrt{-1}}\,d\sigma.$$

Or l'intégrale I est la limite d'une somme de termes de la forme $\Delta\sigma\,\mathrm{R}\,e^{(\Theta+\alpha)\sqrt{-1}}$; cette somme a un module moindre que la somme $\Sigma\mathrm{R}\,\Delta\sigma$ des modules de ses parties et, *a fortiori*, un module moindre que $\Sigma\mathrm{M}\,\Delta\sigma = \mathrm{M}\Sigma\,\Delta\sigma = \mathrm{M}s$: donc le module de la limite I est moindre que Ms, ou tout au plus égal à Ms.

C. Q. F. D.

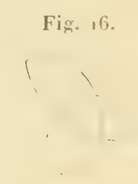
§ VI. — Théorème de Riemann.

Dans ce qui va suivre, nous appellerons *contour fermé simple* une ligne continue fermée ne se traversant pas elle-même; ainsi une circonférence de cercle ou d'ellipse, un rectangle seront des contours fermés simples.

Une lemniscaste de Bernoulli ne constitue pas un contour fermé simple; toutefois, si l'on considérait cette courbe comme la limite d'une ellipse de Cassini à contour fermé simple présentant encore une communication infiniment petite entre les aires de deux boucles, on pourrait considérer la lemniscate en question comme un contour fermé simple.

En tout cas, un contour simple ne limitera jamais une aire se recouvrant elle-même en totalité ou en partie; le contour

Fig. 16.



ci-contre ne serait pas un contour fermé simple.

Théorème I. — *L'intégrale double*

$$\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

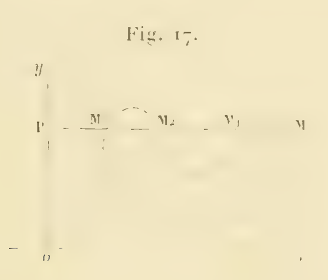
prise pour tous les points d'une aire limitée par un contour fermé simple C *est égale à l'intégrale*

$$\int(X\,dy+Y\,dx),$$

prise le long du contour C, *ce contour étant censé décrit par un observateur ayant l'aire limitée par le contour à sa gauche, c'est-à-dire marchant dans le sens direct.*

En effet, intégrons d'abord le terme $\int\int \frac{\partial X}{\partial x} dx\,dy$ par rapport à x en laissant y constant, nous aurons pour expression de l'intégrale indéfinie $\int X\,dy$. Soit OP la valeur constante donnée à y dans l'intégration partielle effectuée par rapport

Fig. 17.



à x; appelons X_K la valeur que prend X en un point K du plan. La valeur de l'intégrale définie que nous cherchons est la somme des éléments, tels que $\frac{\partial X}{\partial x} dx\,dy$, obtenus en faisant varier x dans l'aire C; si alors la droite $y = OP$ rencontre le contour C aux points consécutifs $M, M_1, M_2, M_3, \ldots$, l'intégrale cherchée s'obtiendra en faisant varier x de PM_3 à PM_2, de PM_1 à PM. . . . de sorte que cette intégrale sera

$$\int (X_M - X_{M_1} - X_{M_2} - X_{M_3} - \ldots) dy$$

ou plus simplement

$$\int X\,dy,$$

en convenant de faire varier X sur tout le contour C, dans le sens direct; car, pour calculer $\int (X_M - \ldots) dy$, il faudra faire varier y depuis la valeur qu'il prend sur le point le plus bas jusqu'à la valeur qu'il prend au point le plus élevé du contour C, et alors les points $M, M_1, \ldots$ se meuvent dans le sens direct. Ainsi l'intégrale $\int\int \frac{\partial X}{\partial x} dx\,dy$ est égale à l'inté-

grale simple $\int X\,dy$ prise le long du contour C et dans le sens direct.

On voit d'une façon analogue que, l'intégrale $\int\int \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy$ étendue à tous les points de l'aire comprise à l'intérieur du contour C est égale à l'intégrale simple $\int Y\,dx$ prise le long du contour C, mais dans le sens rétrograde, ou à l'intégrale $\int - Y\,dx$ prise dans le sens direct ; on a donc

$$\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy = \int(X\,dy + Y\,dx),$$

l'intégrale qui figure dans le second membre étant prise dans le sens direct, tout le long du contour.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *L'intégrale double*

$$\int\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

prise pour tous les points d'une aire limitée par le contour fermé C, *est égale à l'intégrale simple*

$$\int(Y\,dy - X\,dx),$$

prise le long du contour C *dans le sens direct.*

Ce théorème se démontre comme le précédent.

Les deux théorèmes précédents, dus à Riemann, tomberaient en défaut si, à l'intérieur du contour C ou même sur ce contour, les fonctions X, Y ou leurs dérivées partielles devenaient infinies, discontinues ou mal déterminées, car les intégrations que nous avons effectuées ne présenteraient plus aucun sens.

Conclusion. — Si l'expression $X\,dy + Y\,dx$ est une différentielle exacte, $\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}$ est nul, et alors, en vertu du premier théorème de Riemann, *l'intégrale prise le long d'un contour fermé* C *d'une différentielle exacte est nulle ;* ou,

ce qui revient au même, *les intégrales d'une différentielle exacte prises le long des deux contours ayant les mêmes extrémités sont égales,* pourvu qu'entre ces deux contours la différentielle en question soit finie, bien déterminée, et continue ainsi que ses dérivées partielles.

VII. — Théorème fondamental de Cauchy.

Le théorème de Riemann conduit, d'une manière très simple, à un beau théorème que Cauchy a découvert vers 1814 en suivant une tout autre voie (*voir* p. 212).

Le théorème de Riemann consiste en ce que, si les fonctions X et Y restent finies et bien déterminées ainsi que leurs dérivées à l'intérieur d'un contour fermé quelconque C, on a

$$(1) \qquad \int\!\!\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy = \int(X\,dy + Y\,dx),$$

$$(2) \qquad \int\!\!\int\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx\,dy = \int(Y\,dy - X\,dx);$$

les intégrales doubles s'étendent à tous les points de l'aire limitée par le contour C, et les intégrales simples sont prises le long du contour dans le sens direct.

Supposons que $X + Y\sqrt{-1}$ soit une fonction synectique de $x + y\sqrt{-1}$ à l'intérieur du contour C, et sur ce contour, on aura (p. 223)

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x};$$

les formules (1) et (2) se réduiront alors à

$$0 = \int(X\,dy + Y\,dx), \qquad 0 = \int(X\,dx - Y\,dy).$$

Ajoutons ces deux équations après avoir multiplié la première par $\sqrt{-1}$; nous trouverons

$$0 = \int(X + Y\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1})$$

ou

$$0 = \int f(z)\,dz.$$

Il est donc prouvé que *l'intégrale de $f(z)\,dz$ [ou simplement de $f(z)$, comme l'on dit quelquefois], prise le long du contour fermé simple C à l'intérieur duquel $f(z)$ reste synectique, est nulle.*

Il résulte de là que *si, entre deux contours $z_0 z Z$ et $z_0 z' Z$ terminés aux mêmes extrémités, formant par leur ensemble un contour fermé simple, il n'y a pas de point pour lequel la fonction $f(z)$ cesse d'être synectique, les intégrales de $f(z)$ prises entre les mêmes limites z_0 et Z, le long de deux contours $z_0 z Z$ et $z_0 z' Z$, sont égales.*

En effet, le contour $z_0 z Z\, z' z_0$ étant un contour fermé simple, l'intégrale de $f(z)$ prise le long de ce contour sera nulle; or cette intégrale se compose de l'intégrale $f(z)$ prise le long de $z_0 z Z$ et de l'intégrale prise le long de $Z z' z_0$; cette dernière est égale et de signe contraire à l'intégrale de $f(z)$ prise le long de $z_0 z' Z$: les deux intégrales en question sont donc égales. C. Q. F. D.

Théorème de Cauchy. — *La valeur de l'intégrale*

$$\int f(z)\,dz$$

ne change pas, si l'on déforme le contour d'intégration d'une manière continue, mais arbitraire, pourvu que l'on ne lui fasse pas franchir de point pour lequel $f(z)$ cesserait d'être synectique, et qu'on lui conserve les mêmes extrémités z_0 et Z, limites de l'intégrale.

En effet, considérons un contour d'intégration A ayant pour extrémités z_0 et Z et celui que l'on obtient en le déformant sans lui faire franchir de point pour lequel $f(z)$ cesserait d'être synectique. Soit B ce second contour, qui a aussi pour extrémités z_0 et Z. Si ces contours A, B forment par

leur réunion un contour simple fermé, le théorème est démontré, nous rentrons dans le cas considéré tout à l'heure; si les contours A et B se coupent (ailleurs qu'en z_0 et Z) en des points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$, on observera que les intégrales de $f(z)$ prises entre z_0 et ζ_1, ζ_1 et ζ_2, ..., ζ_n et Z sont égales, en vertu de la remarque précédente, et que, par suite, les intégrales prises le long des chemins A et B sont égales.

Ce beau théorème de Cauchy constitue un des plus grands progrès qui aient été faits en Analyse : il a été démontré une première fois (p. 212); mais nous avons pensé que l'on verrait avec plaisir la démonstration originale qu'en a donnée Riemann, démonstration qui est devenue classique en Allemagne. Mais il faut avouer que la démonstration donnée plus haut est bien plus simple et plus naturelle.

Théorème. — *Si la fonction $f(z)$ est synectique pour tous les points d'une aire C limitée par un contour fermé simple, l'intégrale*

$$V = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz,$$

prise le long d'un contour fini contenu dans l'aire C, est une fonction synectique de la limite supérieure, dont la dérivée est $f(Z)$.

En effet, cette intégrale est finie, puisqu'elle est prise le long d'un contour fini; elle est monodrome, puisque, quel que soit le chemin intérieur à C pour se rendre en Z en partant de Z, l'intégrale prend un accroissement nul, qui est la valeur de $\int f(z)$ prise le long d'un contour fermé passant en Z et intérieur au contour fermé C.

En second lieu, je dis que la dérivée de l'intégrale par rapport à Z est $f(Z)$; elle est donc unique et bien déterminée, et par suite l'intégrale est une fonction continue de sa limite supérieure. En effet, si l'on pose $z = \varphi(\sigma) + \sqrt{-1}\,\psi(\sigma)$, σ désignant l'arc du contour d'intégration compté à partir

de z_0, et si l'on appelle s l'arc total suivant lequel on intègre, on aura

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_0^s f(\varphi+\psi\sqrt{-1})(\varphi'+\psi'\sqrt{-1})\,d\sigma = V$$

et, par suite,

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{dV}{ds} : \frac{dZ}{ds}$$

ou

$$\frac{dV}{dZ} = \Big|^{\sigma=s} \left[f(\varphi+\psi\sqrt{-1})(\varphi'+\psi'\sqrt{-1})\right] : \frac{dZ}{ds};$$

mais $\frac{dZ}{ds}$ est la valeur de $\frac{dz}{d\sigma}$ ou $\varphi'+\psi'\sqrt{-1}$ pour $\sigma=s$: on a donc

$$\frac{dV}{dZ} = \Big|^{\sigma=s} f(\varphi+\psi\sqrt{-1}) = \Big|^{\sigma=s} f(z) = f(Z).$$

C. Q. F. D.

On conclut de là que l'intégrale d'une fonction synectique est synectique, puis

$$d\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz = f'(z)\,dz;$$

donc, comme dans le cas où la variable z est réelle,

$$\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz = f(z) - f(z_0).$$

§ VIII. — Cas où le théorème de Cauchy est en défaut.

Le théorème de Cauchy tombera en défaut toutes les fois qu'on voudra l'appliquer à deux contours comprenant entre eux un intervalle à l'intérieur duquel la fonction que l'on veut intégrer cessera d'être synectique, soit que cette fonction devienne infinie, soit qu'elle cesse d'être monodrome; mais, comme on le verra bientôt, les cas où il tombe en défaut sont les plus intéressants.

IX. — Différentiation sous le signe $\int$.

Les règles de la différentiation sous le signe $\int$ s'appliquent aux intégrales prises entre des limites imaginaires, avec des restrictions analogues à celles qui ont été faites à propos des intégrales ordinaires. Supposons que l'on veuille différentier par rapport à α l'intégrale

$$u = \int_{z_0}^{Z} f(z, \alpha)\, dz,$$

on aura, en appelant $\Delta\alpha = h$ un accroissement arbitraire donné à α et ε un infiniment petit,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta u}{h} &= \int_{z_0}^{Z} \frac{f(z, \alpha + h) - f(z, \alpha)}{h}\, dz \\ &= \int_{z_0}^{Z} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dz + \int_{z_0}^{Z} \varepsilon\, dz; \end{aligned}\right.$$

nous supposerons $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ bien déterminé, soit que f soit monogène par rapport à α, soit que la direction dans laquelle a lieu le déplacement $\Delta\alpha$ soit donnée; nous supposerons également f et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ finis; enfin, nous supposerons le contour d'intégration fini et de longueur s. Alors, en appelant E le module maximum de la quantité infiniment petite ε, nous aurons

$$\operatorname{mod} \int_{z_0}^{Z} \varepsilon\, dz \quad \text{ou} \quad \operatorname{mod} \int_{0}^{s} \varepsilon \frac{dz}{ds}\, ds < \int_{0}^{s} \mathrm{E}\, ds$$

ou

$$\operatorname{mod} \int_{0}^{Z} \varepsilon\, dz < \mathrm{E} s;$$

la formule (1) devient donc, en observant que E est infiniment petit avec h et en faisant tendre h vers zéro,

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{z_0}^{Z} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dz.$$

Supposons maintenant la fonction f telle qu'on puisse la développer par la formule de Taylor (t. I, p. 188) par rapport au paramètre α, ou plutôt par rapport à l'accroissement h de ce paramètre, on aura, au lieu de la formule (1),

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u}{h} &= \int_{z_0}^{Z} \frac{f(z, \alpha + h) - f(z, \alpha)}{h}\, dz \\ &= \int_{z_0}^{Z} \left[f'(z, \alpha) + \frac{h\sqrt{2}}{2}\, \varepsilon\, \mathrm{R} \right] dz;\end{aligned}$$

dans cette formule, $f'(z, \alpha)$ désigne la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, ε désigne une imaginaire de module égal à un et R désigne le module maximum de $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ quand on y remplace α par une valeur comprise dans le cercle de centre α et de rayon $\operatorname{mod} h$. Si donc (même dans le cas où le contour d'intégration serait infini) les intégrales $\int^{Z} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dz$ et $\int_{z_0}^{Z} \operatorname{mod} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\, dz$ sont finies, la formule précédente donnera, en faisant tendre h vers 0,

$$\lim \frac{\Delta u}{h} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{z_0}^{Z} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dz.$$

Enfin, lorsque le contour d'intégration sera de longueur infinie, on pourra toujours être ramené au cas où il est fini au moyen d'un changement de variables, comme on l'a montré à propos des intégrales réelles.

§ X. — Calcul des résidus de Cauchy.

Nous appellerons *zéro* ou *racine* d'une fonction $f(z)$ une valeur de z rendant $f(z)$ égale à zéro ; nous appellerons *infini* d'une fonction $f(z)$ une valeur de z rendant $f(z)$ infinie.

Cauchy appelle *résidu* d'une fonction monodrome, monogène, $f(z)$ pour une valeur c de z qui rend $f(z)$ infinie, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z)\, dz,$$

prise le long d'un contour circulaire infiniment petit, décrit du point c comme centre et parcouru dans le sens direct; il désigne ce résidu par la notation

$$\mathcal{E}_c((f(z))) \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_c[f(z)].$$

Nous emploierons la notation

$$\mathcal{E}_c f(z)$$

ou même $\mathcal{E} f(z)$ tout simplement, quand il n'y aura pas de doute relativement à l'infini par rapport auquel on devra prendre le résidu. Cette notation, à laquelle Cauchy a donné plus d'extension, est assez commode, comme on le verra dans la suite.

Le *résidu intégral* d'une fonction relatif à un contour fermé simple donné est la somme des résidus de cette fonction relative à tous les infinis situés dans l'intérieur du contour. Quand on ne spécifie pas de contour, il faut sousentendre qu'il s'agit d'un contour contenant la totalité des infinis de la fonction.

Lorsque la fonction dont on doit prendre le résidu intégral est un produit tel que $\varphi(z)\,\psi(z)$ et que le résidu est pris par rapport à un [ou plusieurs contours] ne contenant que les infinis de $\varphi(z)$, on le représente par la notation

$$\mathcal{E}((\varphi(z)))\,\psi(z).$$

Si, par exemple, on veut représenter le résidu de la fonction $f(z)$ relatif à un infini c et que l'on sache que $f(z)(z-c)$ n'est plus ni nul ni infini pour $z=c$, on pourra écrire ainsi ce résidu

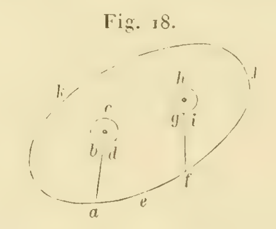
$$\mathcal{E}\frac{(z-c)f(z)}{((z-c))}.$$

Nous allons maintenant montrer l'utilité du nouveau signe $\mathcal{E}$.

THÉORÈME I. — *L'intégrale d'une fonction monodrome et monogène prise le long d'un contour fermé simple est égale au résidu intégral de cette fonction relatif à ce contour, ou, si l'on veut, est égale à la somme des résidus de cette fonction relatifs à chacun des infinis contenus dans le contour, multiplié par* $2\pi\sqrt{-1}$.

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il y ait deux infinis de la fonction $f(z)$ dans l'intérieur d'un contour fermé simple *aefjka*; soient α et β ces infinis; autour de

Fig. 18.



chacun d'eux décrivons un petit cercle *bcd*, *ghi*, et joignons un point de chacun de ces cercles au contour *aefjk* par deux lignes qui ne se coupent pas et qui ne sortent pas de ce contour.

Ceci posé, un contour étant désigné par la notation ABC, ..., représentons, pour abréger, par (ABC, ...) l'intégrale $f(z)dz$ prise le long de ce contour. Le contour *abcdaefghifjka* constitue un contour fermé ne contenant pas d'infini de $f(z)$; on a donc

$$(1) \qquad (abcdaefghifjka) = 0.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}(abcdaefghifjka) = (ab) + (bcd) + (da) \\ + (aef) + (fg) + (ghi) + (if) + (fjka);\end{aligned}$$

or (ab) et (da) sont deux intégrales dont les limites sont inversées, par suite $(ab) + (da)$ est nul, (fg) et (if) ont également une somme nulle; il vient donc

$$(abcdaefghifjka) = (bcd) + (aef) + (ghi) + (fjka)$$

ou encore, en vertu de (1),

$$0 = (bcd) + (ghi) + (aef) + (fjka)$$

ou

$$(2) \qquad 0 = (bcd) + (ghi) + (aefjka);$$

or $(aefjka)$ est l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long du contour fermé donné; (bcd) est égal à $-(dcb)$: or (dcb) est l'intégrale de $f(z)\,dz$ prise le long d'un contour circulaire que l'on peut supposer infiniment petit; cette intégrale, au facteur $2\pi\sqrt{-1}$ près, est le résidu $\mathcal{E}_\alpha f(z)$; on a donc

$$(bcd) = -2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E}_\alpha f(z),$$

$$(ghi) = -2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E}_\beta f(z),$$

et par suite (2) devient

$$\int f(z)\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\left[\mathcal{E}_\alpha f(z) + \mathcal{E}_\beta f(z)\right]$$

ou encore

$$\int f(z)\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E} f(z),$$

le résidu intégral et l'intégrale étant relatifs au même contour.

Théorème II. — *Le résidu de la fonction* $\frac{f(z)}{z-c}$, *où* $f(z)$ *désigne une fonction monodrome et monogène qui n'est ni nulle ni infinie pour* $z = c$, *est égal à* $f(c)$.

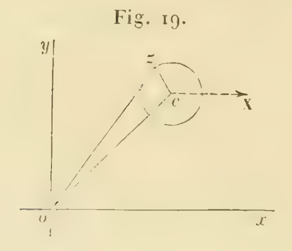
En effet, par définition, on a

$$(1) \qquad \mathcal{E}\frac{f(z)}{z-c} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{z-c},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour circulaire infiniment petit décrit autour du point c comme centre; soit ε le

rayon de ce cercle. Si l'on joint un de ses points z à l'origine,

Fig. 19.



ainsi que son centre, le triangle ocz donnera (t. I, p. 8)

$$z = c + \overline{cz}$$

ou, en appelant θ l'angle que la droite $\overline{cz}$ fait avec l'axe des x,

$$z = c + \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad dz = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\,d\theta;$$

on aura donc

$$\int \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int_0^{2\pi} f(c + \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}})\sqrt{-1}\,d\theta.$$

Nous mettons à l'intégrale les limites o et 2π, parce que, le point z variant le long du cercle, θ varie de o à 2π. Cette formule ayant lieu quelque petit que soit ε, on pourra y faire $\varepsilon = 0$, et l'on aura

$$\int \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int_0^{2\pi} \sqrt{-1}\,f(c)\,d\theta = 2\pi\sqrt{-1}\,f(c);$$

la formule (1) deviendra alors

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\,dz}{z-c} = \mathcal{E}\frac{f(z)}{z-c} = f(c).$$

Théorème III. — *Le résidu de la fonction* $\frac{f(z)}{(z-c)^m}$, *où* m *désigne un exposant entier et positif plus grand que un, et dans laquelle* $f(z)$ *est une fonction finie différente de zéro pour* $z = c$, *est donné par la formule*

$$(3) \qquad \mathcal{E}\frac{f(z)}{(z-c)^m} = \frac{d^{m-1}f(c)}{dc^{m-1}}\,\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

En effet, en différentiant $m-1$ fois de suite, par rapport à c, l'équation (2), on a successivement ([1])

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-c)^2}=1\;\mathcal{E}\frac{f(z)}{(z-c)^2}=\frac{df(c)}{dc},$$

$$\frac{1.2}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-c)^3}=1.2\;\mathcal{E}\frac{f(z)}{(z-c)^3}=\frac{d^2f(c)}{dc^2},$$

. . . . ,

$$\frac{1.2\ldots(m-1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{(z-c)^m}dz=1.2.3\ldots(m-1)\,\mathcal{E}\frac{f(z)}{(z-c)^m}=\frac{d^{m-1}f(c)}{dc^{m-1}},$$

d'où l'on déduit la formule (3).

Théorème IV. — *Si $f(z)$ désigne une fonction telle que $zf(z)$ soit nul pour $z=\infty$, l'intégrale de $f(z)dz$ prise le long d'un contour circulaire de rayon infini sera nulle, et l'on aura*

$$\mathcal{E}f(z)=0.$$

En effet,

$$\mathcal{E}f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)\,dz;$$

pour évaluer l'intégrale, on fera

$$z=re^{\theta\sqrt{-1}},\qquad dz=re^{\theta\sqrt{-1}}d\theta\sqrt{-1}$$

ou

$$dz=z\sqrt{-1}\,d\theta;$$

on trouvera alors, en faisant $r=\infty$,

$$\mathcal{E}f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}zf(z)\,d\theta=0,$$

puisque $zf(z)=0$ pour $r=\infty$.

Théorème V. — *Si, le module de z étant infini et son argument restant compris entre θ_0 et θ_1, $zf(z)$ est nul, l'intégrale $\int f(z)dz$, prise le long d'un arc de cercle de*

([1]) On peut évidemment différentier sous le signe $\mathcal{E}$ comme sous le signe $\int$, puisqu'un résidu est au fond une intégrale définie

rayon infini, décrit de l'origine comme centre et dont les extrémités ont pour angles polaires θ_0 et θ_1, est nulle.

En effet, l'intégrale en question a pour valeur

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(re^{\theta\sqrt{-1}})re^{\theta\sqrt{-1}}d\theta\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{-1}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(z)z.d\theta;$$

si donc, θ variant de θ_0 à θ_1, $zf(z)$ est nul pour $r=\infty$, l'intégrale sera nulle elle-même C. Q. F. D.

Théorème VI. — *La différence des intégrales de $f(z)$ prises entre les mêmes limites, mais le long de deux chemins différents qui ne se coupent pas $z_0z'Z$ et $z_0z''Z$, est égale au résidu R de $f(z)$ relatif au contour fermé*

$$z_0z'Zz''z_0$$

limité par les deux contours $z_0z'Z$ et $z_0z''Z$ multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$.

En effet, d'après le théorème I, on a

$$(z_0z'Zz''z_0)=(z_0z'Z)+(Zz''z_0)=2\pi R\sqrt{-1}$$

ou

$$(z_0z'Z)=(z_0z''Z)+2\pi R\sqrt{-1}.$$

§ XI. — Application du calcul des résidus à la recherche des intégrales définies. — Fractions rationnelles.

Bien que l'on sache intégrer les fractions rationnelles, nous allons appliquer les principes du calcul des résidus à l'évaluation des intégrales de la forme

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx,$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré inférieur de deux unités au degré de $\psi(x)$.

L'intégrale (1) est l'intégrale de $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}dz$ prise tout le long de l'axe des x; elle est donc égale à l'intégrale de la même

fonction prise le long d'un demi-cercle de rayon infini décrit de l'origine comme centre et situé entièrement du côté de l'axe des y positifs, par exemple, augmentée de la somme des résidus de $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} 2\pi\sqrt{-1}$ relatifs aux infinis de cette fonction situés *au-dessus* de l'axe des x; or $\frac{z\varphi(z)}{\psi(z)}$, $z\varphi(z)$ étant de degré inférieur à $\psi(z)$, est nul pour $z=\infty$, donc l'intégrale prise le long du demi-cercle est nulle; donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = 2\pi\sqrt{-1}\sum \mathcal{E}\,\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

le résidu étant pris comme il a été expliqué.

Première application. — Cherchons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx \quad \text{ou} \quad m<n.$$

Elle est égale à

$$2\pi\sqrt{-1}\sum \mathcal{E}\,\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}},$$

le résidu étant relatif à toutes les racines de $1+x^{2n}=0$ situées au-dessus de l'axe des x; ces racines sont

$$\alpha,\quad \alpha^3,\quad \ldots,\quad \alpha^{2n-1},$$

où

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{2n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2n};$$

le résidu de $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ par rapport à α^{2k+1} est

$$\alpha^{(2k+1)2m}\,\mathrm{Lim}\frac{x-\alpha^{2k+1}}{1+x^{2n}} \qquad \text{pour} \qquad x=\alpha^{2k+1}$$

ou

$$\frac{\alpha^{(2k+1)2m}}{2n\,\alpha^{(2k+1)(2n-1)}} = -\frac{\alpha^{(2k+1)(2m+1)}}{2n};$$

on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha^{(2k+1)(2m+1)}.$$

Le second membre de cette formule est la somme des termes d'une progression géométrique, et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{2n}\,\frac{\alpha^{2m+1}+\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2m+1}-1}$$

ou, en remplaçant α par sa valeur,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}$$

ou évidemment

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Si l'on pose $x^{2n}=z$ et $\dfrac{2m+1}{2n}=a$, il vient

$$\int_{0}^{\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

résultat que nous retrouverons plus loin.

Deuxième application. — On trouve de même

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = 2\pi\sqrt{-1}\sum \mathcal{E}\,\frac{1}{(z^2+a^2)^m},$$

le résidu étant relatif aux infinis de $\dfrac{1}{(z^2+a^2)^m}$ situés au-dessus de l'axe des x. Or il n'y a qu'un seul infini, à savoir $a\sqrt{-1}$, situé au-dessus de cet axe; le résidu cherché sera donc

$$\left[\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\,\frac{1}{(z+a\sqrt{-1})^m}\right]_{z=a\sqrt{-1}}$$

ou

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(2a\sqrt{-1})^{2m-1}}\,\frac{m(m+1)\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

La formule (1) donne alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = 2\pi\,\frac{m(m+1)\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\left(\frac{1}{2a}\right)^{2m-1}.$$

XII. — Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$.

Supposons que l'on intègre la fonction $\frac{e^{bz\sqrt{-1}}}{z}$ le long d'un contour formé de l'axe des x négatifs depuis un point situé à la distance $-R$ de l'origine, jusqu'à un autre situé à la distance $-\varepsilon$; puis d'un demi-cercle de rayon ε situé au-dessus de l'axe des x et ayant son centre à l'origine; puis de l'axe des x positifs depuis le point $+\varepsilon$ jusqu'au point R; enfin, d'un demi-cercle A situé au-dessus de l'axe des x ayant son centre à l'origine et pour rayon R. L'intégrale le long de ce contour sera nulle; l'intégrale prise le long du cercle de rayon R sera nulle pour $R=\infty$, si l'on suppose b positif; en effet, alors $z\frac{e^{bz\sqrt{-1}}}{z}$ ou $e^{bz\sqrt{-1}}$ se réduit à zéro quand la partie imaginaire de z est positive, ce qui a lieu le long du cercle considéré. On a donc, en supposant $R=\infty$,

$$0=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{x}\,dx+\int_{A}\frac{e^{bz\sqrt{-1}}}{z}\,dz+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{x}\,dx;$$

la seconde intégrale étant prise le long du demi-cercle A pour $\varepsilon=0$ est, au signe près, le demi-résidu de $\frac{e^{bz\sqrt{-1}}}{z}$ pour $z=0$, multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$, ou $-\pi\sqrt{-1}$. On trouve donc

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{x}\,dx=\pi\sqrt{-1}.$$

Si l'on remplace $e^{bx\sqrt{-1}}$ par $\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx$, on voit que la partie réelle du premier membre est nulle et que

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin bx}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\pi.$$

En ajoutant l'élément $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\sin bx}{x}\,dx$, qui est infiniment petit, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\pi$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Changeant b en $-b$, l'intégrale change de signe; donc, quand b est négatif, il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Quand $b = 0$, on a évidemment

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = 0.$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx$$

se déduit de la précédente; en effet, elle se décompose en

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx.$$

Supposons a et b positifs, si $a > b$, la somme précédente est $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$; si $a < b$, elle est égale à $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ ou zéro; enfin si $a = b$, elle est égale à $\frac{\pi}{4}$.

C'est peut-être ici l'occasion de parler de la notion de la *valeur principale* d'une intégrale, dont Cauchy a fait usage. Considérons l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)\,dz.$$

Si elle est prise le long d'un contour passant en un point c pour lequel $\varphi(z)$ devient infini, Cauchy appelle *valeur principale* de cette intégrale la somme

$$\int_{z_0}^{c'} \varphi(z)\,dz + \int_{c''}^{z_1} \varphi(z)\,dz,$$

c' et c'' désignant les points du contour d'intégration situés à

droite et à gauche du point c, à des distances infiniment petites, égales entre elles, du point c. Par exemple,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x^3} = 0$$

est la valeur principale de $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$ prise le long de l'axe des x.

Le but de Cauchy en introduisant cette notion a été de simplifier un peu les notations. Pour montrer l'usage que l'on peut en faire, calculons la valeur de l'intégrale

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx \qquad \text{où} \qquad b > 0.$$

A cet effet intégrons $\frac{1 - e^{2bz\sqrt{-1}}}{z^2}$ le long d'un contour formé de l'axe des x de $-\infty$ à $-\varepsilon$, d'un demi-cercle de rayon ε décrit au-dessus de l'axe des x, de l'axe des x de $+\varepsilon$ à $+\infty$, enfin d'un demi-cercle de rayon infini décrit de l'origine comme centre au-dessus de l'axe des x. En supposant ε infiniment petit, on aura

$$\text{val. pr.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2bz\sqrt{-1}}}{z^2} dz + 2\pi\sqrt{-1}\, b\sqrt{-1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{val. pr.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2bz\sqrt{-1}}}{z^2} dz = 2\pi b;$$

séparant les parties réelles et les parties imaginaires et en observant que la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin bx)^2}{x^2} dx$ est égale à sa valeur principale, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin^2 bx}{x^2} dx = 2\pi b,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx = \pi b.$$

Pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^n dx$, n étant un nombre entier quelconque, on remplacerait $\sin bx$ par sa valeur en exponentielles et l'on serait ramené à calculer les valeurs principales d'intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ib\sqrt{-1}x}}{x^n}\,dx.$$

Le calcul ne présenterait d'autre difficulté que l'évaluation de ces intégrales prises le long de demi-cercles de rayons très petits, décrits de l'origine comme centre au-dessus ou au-dessous de l'axe des x.

XIII. — Sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$.

Si l'on intègre la fonction

$$\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{1+z^2},$$

dans laquelle on suppose a positif, le long de l'axe des x de $-\infty$ à $+\infty$ et le long d'un demi-cercle de rayon infini décrit de l'origine comme centre au-dessus de l'axe des x, la somme des intégrales ainsi calculées sera égale au résidu de $\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{1+z^2}$ relatif au point $z=\sqrt{-1}$, pour lequel la fonction en question devient infinie, multipliée par $2\pi\sqrt{-1}$, c'est-à-dire à

$$2\pi\sqrt{-1}\,\frac{e^{-a}}{2\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad \pi e^{-a}.$$

Or l'intégrale prise le long du demi-cercle est nulle; on aura donc seulement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}\,dx}{1+x^2} = \pi e^{-a}$$

et, en séparant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos a x}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-a},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a x}{1+x^2}\, dx = 0.$$

La première formule doit évidemment être remplacée par πe^{a} quand a est négatif. En différentiant cette formule, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin a x}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-a},$$

formule dont l'exactitude peut être vérifiée en faisant usage du contour d'intégration employé tout à l'heure et de la fonction $\dfrac{x e^{ax\sqrt{-1}}}{1+x^2}$.

La même méthode s'applique à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos a x}{(1+x^2)^m}\, dx = 2\pi\sqrt{-1}\, \mathcal{E} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{(1+x^2)^m}$$

ou à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin a x}{(1+x^2)^m}\, dx = 2\pi\, \mathcal{E} \frac{x e^{ax\sqrt{-1}}}{(1+x^2)^m},$$

On trouve la première égale à

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\, e^{-a}}{1.2.3\ldots(m-1)} \left[\frac{(a\sqrt{-1})^{m-1}}{(2\sqrt{-1})^m} - \frac{m(m-1)}{1} \frac{(a\sqrt{-1})^{m-2}}{(2\sqrt{-1})^{m+1}} + \ldots \right]$$

ou à

$$\frac{\pi e^{-a}}{1.2.3\ldots(m-1)} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1} \left(\frac{a}{2}\right)^{m-2} \frac{1}{2^2} + \ldots \right].$$

XIV. — Sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{az}}{1+e^z}\, dz$.

Cette intégrale joue un rôle important dans une théorie que nous étudierons plus loin. Si l'on intègre la fonction

$$y = \frac{e^{az}}{1+e^z} \quad \text{où} \quad 0 < a < 1$$

le long d'un contour rectangulaire formé de l'axe des x, d'une perpendiculaire à cet axe menée à l'infini, au-dessus de cet axe et égale à 2π, d'une parallèle à l'axe des x située à la distance $+2\pi$ de cet axe, enfin d'une perpendiculaire menée à l'infini négatif sur l'axe des x, au-dessus de cet axe et de longueur 2π, l'intégrale prise le long du contour en question sera égale à $2\pi\sqrt{-1}$ multiplié par le résidu de la fonction y relative au point $z = \pi\sqrt{-1}$ qui la rend infinie; on aura donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(x+2\pi\sqrt{-1})}\,dx}{1+e^x} = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E}\,\frac{e^{az}}{1+e^z},$$

en observant que le long des côtés verticaux du rectangle la fonction y est nulle. Cette formule peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x}\left(1-e^{2a\pi\sqrt{-1}}\right) = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{e^{a\pi\sqrt{-1}}}{-1};$$

on en tire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x} = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{1}{e^{a\pi\sqrt{-1}} - e^{-a\pi\sqrt{-1}}}$$

ou enfin

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Si l'on fait $e^x = t$, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En changeant a en $1-a$, il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{-a}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

formule que nous avons déjà rencontrée (p. 250).

Cette méthode présente de l'analogie avec celle qui permet de déterminer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx \qquad \text{où} \qquad a \text{ et } b < 1 \text{ et } > 0.$$

Intégrons la fonction

$$\frac{e^{az} - e^{bz}}{1 - e^z}$$

le long d'un rectangle ayant pour côtés l'axe des x, une parallèle à cet axe située à une distance π et au-dessus de cet axe et deux parallèles à l'axe des y menées à l'infini de part et d'autre de cet axe; on aura un résultat nul, et, les intégrales le long des côtés verticaux du rectangle étant nulles, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x}\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(x+\pi\sqrt{-1})} - e^{b(x+\pi\sqrt{-1})}}{1 + e^x}\,dx = 0$$

ou, en vertu de la formule (1),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} e^{a\pi\sqrt{-1}} - \frac{\pi}{\sin b\pi} e^{b\pi\sqrt{-1}}$$
$$= \pi \cot a\pi - \pi \cot b\pi.$$

En posant $e^x = t$, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1} - t^{b-1}}{1 - t}\,dt = \pi(\cot a\pi - \cot b\pi)$$

et, en changeant a en $1 - a$ et b en $1 - b$, ce qui est permis, on a encore, pour les valeurs de a et de b comprises entre 0 et 1,

$$\int_0^{\infty} \frac{t^a - t^b}{1 - t}\,dt = \pi(\cot b\pi - \cot a\pi).$$

Si l'on différentie par rapport à a, il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{\log t \,.\, t^a}{1 - t}\,dt = \pi^2 \operatorname{cos\acute{e}c} a\pi,$$

et, pour $a = \frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}\,\log t}{1 - t}\,dt = \pi^2.$$

XV. — Intégrales de Fresnel.

Soient OA une droite de longueur r comptée sur l'axe des x, OB une droite de même longueur faisant avec l'axe

des x l'angle $\beta < \frac{\pi}{4}$, enfin soit AB un arc de cercle de rayon r décrit de l'origine comme centre; intégrons $e^{-z^2}dz$ le long du contour OABO, le résultat sera nul; l'intégrale prise le long du contour circulaire pour $r = \infty$ est nulle, parce que ze^{-z^2} est nul le long de ce contour, ce dont on s'assure en posant $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$, ce qui donne

$$re^{\theta\sqrt{-1}}\,e^{-r^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta)};$$

le module $r\cos\theta\, e^{-r^2\cos 2\theta}$ de cette quantité est nul pour $r = \infty$, pourvu que $2\theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\theta < \frac{\pi}{4}$. Il résulte de là que l'intégrale de e^{-z^2} le long de OA est la même que le long de OB pour $r = \infty$; ainsi

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-l^2(\cos 2\beta + \sqrt{-1}\sin 2\beta)}\,dl\,(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta).$$

En remplaçant la première intégrale par sa valeur connue $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on a (p. 136)

$$\int_0^\infty e^{-l^2(\cos 2\beta + \sqrt{-1}\sin 2\beta)}\,dl = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\beta\sqrt{-1}}.$$

En séparant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on obtient deux formules que voici :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-l^2\cos 2\beta}\cos(l^2\sin 2\beta)\,dl = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\beta,\\ &\int_0^\infty e^{-l^2\cos 2\beta}\sin(l^2\sin 2\beta)\,dl = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\beta,\end{aligned}\right.$$

β désignant un arc compris entre o et $\frac{\pi}{4}$, et que l'on ne peut pas, par conséquent, prendre égal à $\frac{\pi}{4}$.

Considérons cependant la première formule (1) et désignons, pour abréger, par dV la quantité écrite sous le signe $\int$, on pourra la mettre sous la forme

$$\int_0^\alpha dV + \int_\alpha^{\alpha\sqrt{3}} dV + \int_{\alpha\sqrt{3}}^{\alpha\sqrt{5}} dV + \ldots + \int_{\alpha\sqrt{2n-1}}^{\alpha\sqrt{2n+1}} dV + \ldots = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\beta,$$

α désignant la quantité $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\sin 2\beta}}$. Les intégrales qui figurent dans cette formule sont alternativement positives et négatives et décroissantes en valeur absolue ; le premier membre de la formule en question est une série convergente, et, si l'on prend un nombre limité de termes dans cette série, l'erreur sera moindre que le premier terme négligé ; on peut donc écrire

$$\int_0^{\alpha\sqrt{2n-1}} dV + \theta \int_{\alpha\sqrt{2n-1}}^{\alpha\sqrt{2n+1}} dV = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\beta,$$

θ désignant une quantité comprise entre -1 et $+1$. Mais, en valeur absolue et en supposant $\cos 2\beta > \frac{1}{2}$,

$$\int_{\alpha\sqrt{2n-1}}^{\alpha\sqrt{2n+1}} dV < \int_{\alpha\sqrt{2n-1}}^{\alpha\sqrt{2n+1}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}(2n-1)}\,dl \quad \text{ou} \quad < e^{-\frac{\alpha^2}{2}(2n-1)}\delta,$$

δ désignant la différence $\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\sqrt{\dfrac{\pi}{2\sin 2\beta}}$; comme nous voulons faire tendre β vers $\frac{\pi}{4}$, nous pouvons supposer alors $4\sin 2\beta$ plus grand que un, et nous trouverons

$$\int_{\alpha\sqrt{2n-1}}^{\alpha\sqrt{2n+1}} dV < \sqrt{\pi}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)e^{-\pi(2n-1)}$$

ou

$$< \sqrt{(2n+1)\pi}\,e^{-\pi(2n-1)};$$

on aura donc finalement, θ_1 étant compris entre -1 et $+1$,

$$\int_0^{\alpha\sqrt{2n-1}} dV + \theta_1\sqrt{(2n+1)\pi}\,e^{-\pi(2n-1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\beta.$$

Faisons tendre β vers $\frac{\pi}{4}$, cette formule aura toujours lieu et à la limite, pour $\beta = \frac{\pi}{4}$, il viendra encore

$$\int^{\alpha\sqrt{2n-1}} \cos l^2\,dl + \theta_1\sqrt{(2n+1)\pi}\,e^{-\pi(2n-1)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Cette formule ayant lieu quel que soit n et le terme en θ_1 ayant pour limite zéro pour $n = \infty$, on aura

$$\int_0^\infty \cos l^2 \, dl = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Un raisonnement analogue conduit à la formule

$$\int_0^\infty \sin l^2 \, dl = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Ces deux intégrales sont connues sous le nom d'*intégrales de Fresnel,* à cause de l'usage que ce physicien en a fait en Optique, mais elles avaient déjà été trouvées par Euler.

Intégrons encore la fonction $e^{-z^2}\,dz$ le long d'un rectangle ayant pour côtés l'axe des x, une parallèle à l'axe des x menée à la distance $+\alpha$ de cet axe, et deux autres côtés de part et d'autre de l'axe des y à l'infini; nous aurons

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - \int_{\infty}^{+\infty} e^{-(x+\alpha\sqrt{-1})^2}\,dx = 0,$$

car l'intégrale le long du rectangle et des côtés verticaux est nulle. On tire de là

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2\alpha x\sqrt{-1}+\alpha^2}\,dx$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2\alpha x\sqrt{-1}}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-\alpha^2}$$

ou, en séparant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx = \sqrt{\pi}\,e^{-\alpha^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2\alpha x \, dx = 0.$$

XVI. — Sur une formule générale propre à faire connaître un grand nombre d'intégrales définies.

Soit $f(z)$ une fonction monodrome et monogène dans l'intérieur d'un cercle de rayon R, décrit de l'origine comme

centre; en intégrant $\frac{f(z)}{z}$ le long de ce cercle, on a, en supposant $f(0)$ fini,

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta\sqrt{-1} = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E}\,\frac{f(z)}{z}$$

ou bien

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta = 2\pi f(0) + 2\pi\,\mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{z},$$

le résidu se rapportant aux seuls infinis de $f(z)$ contenus dans le cercle de rayon R considéré.

Si nous prenons $f(z) = \frac{1}{a+z}$, nous avons

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}} = \frac{2\pi}{a} + 2\pi\,\mathcal{E}\,\frac{1}{z((z+a))};$$

supposons $a = re^{\alpha\sqrt{-1}}$ et $r > \mathrm{R}$, nous aurons

$$(1)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(r\cos\alpha + \mathrm{R}\cos\theta) + \sqrt{-1}\,(r\sin\alpha + \mathrm{R}\sin\theta)} = \frac{2\pi}{r(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)}$$

ou, séparant les parties réelles et imaginaires,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{d\theta(r\cos\alpha + \mathrm{R}\cos\theta)}{r^2 + \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}r\cos(\theta-\alpha)} = 2\pi\frac{\cos\alpha}{r}, \\ &\int_0^{2\pi} \frac{d\theta(r\sin\alpha + \mathrm{R}\sin\theta)}{r^2 + \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}r\cos(\theta-\alpha)} = 2\pi\frac{\sin\alpha}{r}. \end{aligned}\right.$$

Si $r < \mathrm{R}$ la formule (1) doit être corrigée ainsi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(r\cos\alpha + \mathrm{R}\cos\theta) + \sqrt{-1}\,(r\sin\alpha + \mathrm{R}\sin\theta)} = \frac{2\pi}{r(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)} + \frac{2\pi}{-r(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)}$$

et les intégrales (2) sont nulles.

Supposons en second lieu $f(z) = \log(1-z)$; si l'on a

$R < 1$, la fonction $f(z)$ sera monodrome et monogène et l'on aura, en observant que $f(0) = 0$,

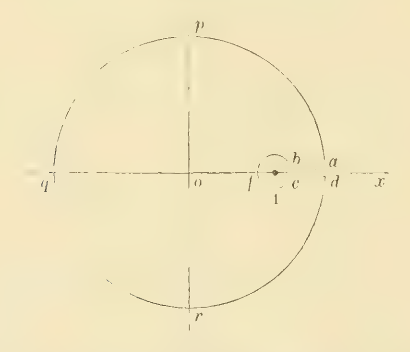
$$\int_0^{2\pi} \log(1 - R\cos\theta - \sqrt{-1}\,R\sin\theta)\,d\theta = 0$$

ou, séparant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + R^2 - 2R\cos\theta)\,d\theta = 0.$$

Supposons maintenant $R > 1$. La fonction $\log(1 - z)$ reste monodrome à l'intérieur d'un contour qui ne contient pas le point 1 ; autour du point 1 décrivons un petit cercle *bfc* ; soit *apqrd* (*fig.* 20) le cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre, la fonction $\frac{\log(1-z)}{z}$ sera monodrome et monogène à l'intérieur du contour *abfcdrqpa* : son intégrale le long de

Fig. 20.



ce contour sera donc nulle. Or l'intégrale le long de *ab* étant désignée par *i*, l'intégrale le long du petit cercle *bfc* étant désignée par *c*, l'intégrale le long de *cd* s'obtiendra en observant que le point z tournant autour du point $\log(1 + z)$ augmente de $+ 2\pi\sqrt{-1}$; l'intégrale le long de *cd* sera donc $-i + \int_{+1}^{R} \frac{2\pi\sqrt{-1}\,dz}{z}$, l'intégrale le long du cercle *drqpa* sera représentée par C. En ajoutant ces intégrales, on a

$$0 = i + c - i + 2\pi\sqrt{-1}\log R + C$$

ou

$$(1) \qquad c + 2\pi\sqrt{-1}\log R + C = 0.$$

Pour avoir c, il faut poser $z = 1 + \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}$, et faire varier θ de 0 à 2π, ce qui donne

$$c = \int_0^{2\pi} \frac{\log\varepsilon + (\theta + \pi)\sqrt{-1}}{1 + \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}}\,\varepsilon\, d\theta\sqrt{-1};$$

pour $\varepsilon = 0$, on voit donc que $c = 0$. On a ensuite à évaluer C, qui est

$$C = -\int_0^{2\pi} \frac{\log(1-z)}{z}\frac{dz}{d\theta}\,d\theta$$

ou

$$C = -\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\log(1 - 2R\cos\theta + R^2)\,d\theta - \int_0^{2\pi} \operatorname{arctang}\frac{R\sin\theta}{1 - R\cos\theta}\,d\theta;$$

on a donc, en portant ces valeurs dans (1),

$$\sqrt{-1}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\log(1 - 2\cos\theta\, R + R^2) - \operatorname{arctang}\frac{R\sin\theta}{1 - R\cos\theta}\sqrt{-1}\right]d\theta = 2\pi\sqrt{-1}\log R;$$

on en conclut

$$\int_0^{2\pi}\log(1 - 2R\cos\theta + R^2)\,d\theta = 4\pi\log R.$$

XVII. — Intégrales définies de fonctions non monodromes.

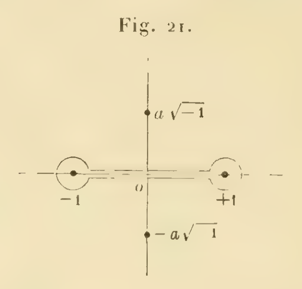
Proposons-nous de trouver la valeur de l'intégrale

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

Si l'on enveloppe les points -1 et $+1$ d'un contour C formé de deux petits cercles et de deux droites parallèles à l'axe des x, la fonction placée sous le signe $\int$ dans l'inté-

grale (1) sera monodrome dans toute l'étendue du plan, pourvu que la variable x reste toujours en dehors du contour C. L'intégrale prise le long du contour C sera donc égale

Fig. 21.



à l'intégrale prise le long d'un contour circulaire de rayon infini, moins les résidus relatifs aux points $a\sqrt{-1}$ et $-a\sqrt{-1}$ multipliés par $2\pi\sqrt{-1}$.

Évaluons d'abord l'intégrale prise le long de C; partons de l'origine en prenant le radical égal à $+1$; le long du chemin où l'intégrale a la valeur

$$(2)\qquad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Le long du cercle décrit autour du point 1, il est facile de s'assurer que l'intégrale est infiniment petite; mais, après que la variable z a tourné autour du point 1, le radical $\sqrt{1-x^2}$ a changé de signe, et l'intégrale prise du point 1 au point o a encore la valeur (2). On verrait de même que, le long du restant du contour C, l'intégrale acquiert la valeur

$$-\int_0^{-1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}};$$

l'intégrale totale prise le long de C est donc

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Le long du cercle du rayon infini, l'intégrale étant nulle,

l'expression précédente sera égale à $2\pi\sqrt{-1}$ multipliée par les résidus relatifs aux points $a\sqrt{-1}$ et $-a\sqrt{-1}$; les valeurs absolues de ces résidus sont

$$\frac{1}{2a\sqrt{-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{+2a\sqrt{-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}};$$

comme l'intégrale proposée n'est ni nulle ni négative, il faut prendre ces résidus avec le signe $+$, et l'on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}.$$

D'ailleurs on peut déterminer les signes des résidus *a priori* en remarquant que, l'argument de x le long de l'axe des x ayant à l'origine été pris égal à zéro, il est égal à $\frac{\pi}{2}$ en $a\sqrt{-1}$ et à $\frac{3\pi}{2}$ en $-a\sqrt{-1}$.

Une analyse toute semblable à la précédente conduit à la formule

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

qu'il est facile de vérifier directement, en supposant a réel et > 1. En différentiant les formules précédentes, la première par rapport à a^2, la seconde par rapport à a, on obtient des formules utiles. En intégrant la dernière, on trouve

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\log\frac{a-x}{b-x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{b+\sqrt{b^2-1}}\right).$$

XVIII. — Formule de Frullani.

C'est peut-être ici l'occasion de démontrer une formule qui se rapproche de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = \mathcal{E}f(z)2\pi\sqrt{-1}$$

de Cauchy, vraie quand $zf(z)$ s'annule le long d'un demi-cercle de rayon infini décrit sur l'axe des x comme diamètre; cette formule, due à Frullani, permet d'évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx,$$

lorsque l'intégrale singulière

$$\int_\varepsilon^{\frac{a\varepsilon}{b}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

est nulle pour $\varepsilon = \infty$.

En effet, considérons l'intégrale

$$\int_0^{a\varepsilon} \frac{\varphi(ax)-\varphi(o)}{x}\,dx;$$

si l'on y fait $x = \frac{u}{a}$, elle devient

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(u)-\varphi(o)}{u}\,du;$$

elle est donc indépendante de a, et l'on a

$$\int_0^{a\varepsilon} \frac{\varphi(ax)-\varphi(o)}{x}\,dx = \int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi(bx)-\varphi(o)}{x}\,dx$$

ou

$$\int_0^{a\varepsilon} \frac{\varphi(ax)-\varphi(o)}{x}\,dx - \int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi(bx)-\varphi(o)}{x}\,dx = o.$$

En supposant $a > b$, on a

$$\int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx - \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(bx)-\varphi(o)}{x}\,dx = o$$

ou

$$(1)\qquad \int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx = \varphi(o)\log\frac{b}{a} + \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx.$$

Si l'on fait $\varepsilon = \infty$, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\, dx = \varphi(0) \log \frac{b}{a} + \lim \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(bx)}{x}\, dx.$$

Telle est la formule de Frullani. Si l'intégrale singulière

$$\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(bx)}{x}\, dx = \int_{\varepsilon}^{\frac{a\varepsilon}{b}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

est nulle, elle devient

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\, dx = \varphi(0) \log \frac{b}{a}.$$

Ainsi, pour $\varphi(x) = \cos x$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx = \log \frac{b}{a};$$

pour $\varphi(x) = e^{-x}$, on a

$$\int_0 \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \log \frac{b}{a}.$$

La formule (1) peut s'écrire, en remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi'(x)$,

$$\int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi'(ax) - \varphi'(bx)}{x}\, dx = \varphi'(0) \log \frac{b}{a} + \int_{\varepsilon}^{\frac{a\varepsilon}{b}} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx;$$

intégrons par rapport à a depuis c, nous aurons

$$\begin{aligned} &\int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi(ax) - \varphi(cx) - (a-c)\varphi'(bx)x}{x^2}\, dx \\ &\quad = (a-c)\varphi'(0)\log b - \varphi'(0)[a \log a - a - c \log c + c] \\ &\qquad + \int_c^a \int_{\varepsilon}^{\frac{a\varepsilon}{b}} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx. \end{aligned}$$

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction paire, en sorte que $\frac{\varphi(ax) - \varphi(cx)}{x^2}$ soit fini pour $x = 0$; $\varphi'(ax)$ sera impaire et

nulle pour $x = 0$, et la formule précédente s'écrira

$$\int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi(ax) - \varphi(cx)}{x^2}\, dx$$

$$= (a-c)\int_0^{b\varepsilon} \frac{\varphi'(bx)}{x}\, dx + \int_a^c \int_\varepsilon^{\frac{a\varepsilon}{b}} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx.$$

On peut prendre $\varepsilon = \infty$, et, si l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi'(bx)}{x}\, dx$$

est finie, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax) - \varphi(cx)}{x^2}\, dx = (a-c)\int_0^\infty \frac{\varphi'(bx)}{x}\, dx;$$

ainsi, pour $\varphi(x) = \cos x$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos cx}{x^2}\, dx = -(a-c)\frac{\pi}{2}.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. On a

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^a + 1}{e^a - 1} - \frac{1}{2a}.$$

(LEGENDRE.)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 - 2a\cos x + a^2}\, x\, dx = \frac{\pi}{4a}\log(1+a), \text{ si } -1 < a < 1,$$

$$= \frac{\pi}{4a}\log\left(1 + \frac{1}{a}\right) \text{ si } a^2 > 1.$$

(CAUCHY.)

3. $$\int_0^\infty x^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right)\frac{r\,dx}{x^2 + r^2} = \frac{\pi}{2}\, r^{a-1} e^{-br}.$$

On suppose $a, b, r, s > 0$. (CAUCHY.)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2\theta}{1 - 2r\cos 2\theta + r^2}\log\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}\log\frac{1-r}{4}.$$

On suppose $r^2 < 1$.

Pour trouver cette intégrale par la méthode de Cauchy, on fera bien de la transformer en posant $\operatorname{tang}\theta = x$. (CAUCHY.)

En déduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\theta \, d\theta = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

5. Pour $r^2 < 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2\theta}{1 - 2r\cos 2\theta + r^2} \log \operatorname{tang}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{4}\log\frac{1-r}{1+r}.$$

(CAUCHY.)

Voir l'exercice précédent.

6. On a, pour $r^2 < 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos 2\theta}{1 - 2r\cos 2\theta + r^2} \log \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi}{4}\log\frac{1+r}{4}.$$

(CAUCHY.)

Voir l'exercice 4.

7. Prouver que

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{2k^n}\int_0^{\pi} \frac{\cos 2n\theta \, d\theta}{\sqrt{1 - 2k\cos^2\theta + k^2}}$$

(*Voir* BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques*, p. 148.)

8. Trouver la valeur des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^4}\,dx.$$

9. Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 x\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx.$$

10. Étudier la fonction $\sqrt[3]{(x-1)x}$, et dire à l'intérieur de quels contours elle reste monodrome.

11. Étudier la fonction $\sqrt{x} + \sqrt{x-1}$.

12. Soit $\varphi(z)$ une fonction entière de z; si la valeur absolue de a est moindre que 1, on a

$$\int_0^\pi dx\,\varphi\left(\frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\int_0^\pi dx\,\varphi(\sin^2 x);$$

si la valeur absolue de a est plus grande que 1, on a

$$\int_0^\pi dx\,\varphi\left(\frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\int_0^\pi dx\,\varphi\left(\frac{\sin^2 x}{a^2}\right).$$

(Liouville, *Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XIX).

CHAPITRE VII.

INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

I. — Théorèmes de Cauchy.

Rappelons qu'une série est *uniformément convergente* (t. I, p. 32) par rapport à x entre des limites données (réelles ou imaginaires), quand, x restant compris dans ces limites, on peut déterminer le nombre n de telle sorte que la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$, quel que soit p, ait un module moindre qu'une quantité donnée ε, la valeur du nombre n ainsi déterminée étant d'ailleurs indépendante de x.

Rappelons en second lieu que, si les fonctions de x représentées par $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ sont continues dans l'intérieur d'un contour fermé simple C et que si la série

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est uniformément convergente à l'intérieur du contour C, la valeur $\varphi(x)$ de cette série est une fonction continue à l'*intérieur* de ce contour.

Premier théorème de Cauchy. — *Si les fonctions réelles $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, de x sont susceptibles d'intégration entre les limites x_0 et X de x, si de plus entre ces limites la série*

$$(1) \qquad \varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est uniformément convergente et représente une fonction $\varphi(x)$ susceptible d'intégration, si enfin on a

$$x_0 < a < b < X,$$

on aura

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots.$$

Posons en effet

$$R_n(x) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots;$$

la série (1) étant supposée uniformément convergente entre x_0 et X, on pourra, entre ces limites, supposer n tel que mod $R_n(x) < \varepsilon$, et de (1) l'on déduira

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n(x),$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n(x)dx.$$

Mais mod $R_n(x)$ étant moindre que ε, mod $\int_a^b R_n(x)dx$ sera moindre que $\varepsilon(b-a)$; on peut donc le représenter par $\theta\varepsilon(b-a)$, θ désignant un nombre compris entre -1 et $+1$, de sorte que l'équation précédente s'écrira

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \theta\varepsilon(b-a);$$

si alors $b-a$ est fini, c'est-à-dire si les limites de l'intégration a, b ne sont pas infinies, $\theta\varepsilon(b-a)$ pourra comme ε être pris aussi petit que l'on voudra, et la formule précédente deviendra, pour $n = \infty$,

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots.$$

C. Q. F. D.

Pour bien démontrer la nécessité de n'appliquer la formule précédente que dans le cas où a et b sont finis, nous considérerons la série uniformément convergente entre o et ∞

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x+n)^2} + \ldots.$$

[car le reste peut être pris $< \varepsilon$ en prenant n tel que

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

soit $< \varepsilon$], et nous aurons, en intégrant de x à ∞,

$$-\int_x^\infty \varphi(x)\,dx = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n} + \dots,$$

résultat absurde, puisque le second membre est divergent.

Second théorème de Cauchy. — *Si les fonctions $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ de x sont synectiques à l'intérieur d'un contour fermé simple C, si de plus la série*

(1) $$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

est uniformément convergente à l'intérieur de ce contour :

1° *Ce que l'on a déjà vu, $\varphi(x)$ est continu, et monodrome dans l'intérieur de C.*

2° *On aura*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \dots + \int_a^b u_n\,dx + \dots,$$

le contour d'intégration ab ne rencontrant jamais le contour C.

3° *Pour tout point x intérieur au contour C, on aura*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx} + \dots,$$

et la fonction φ sera synectique dans le contour C.

En effet, la série (1) étant uniformément convergente, on peut prendre n tel que, quel que soit x contenu dans C, on ait

$$\operatorname{mod}(u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) < \varepsilon$$

ou, en appelant R(x) la quantité placée entre parenthèses,

(2) $$\operatorname{mod} R(x) < \varepsilon,$$

et comme (1) donne

$$\varphi(x) = u_0 + \ldots + u_n + \mathrm{R}(x),$$

il viendra

$$(3) \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b \mathrm{R}(x)\,dx;$$

mais, en appelant ds l'élément d'arc du contour d'intégration et σ la longueur totale de ce contour, on a

$$\int_a^b \mathrm{R}(x)\,dx = \int_0^\sigma \mathrm{R}(x)\,\frac{dx}{ds}\,ds$$

et, si l'on observe que le module de $\dfrac{dx}{ds}$ est égal à un,

$$\operatorname{mod} \int_a^b \mathrm{R}(x)\,dx < \int_0^\sigma \varepsilon\,ds \quad \text{ou} \quad < \sigma\varepsilon.$$

L'intégrale $\int_a^b \mathrm{R}\,dx$ peut donc être représentée par $\theta\sigma\varepsilon$, θ désignant une imaginaire de module inférieur ou tout au plus égal à un, et la formule (3) devient

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \theta\sigma\varepsilon.$$

Si donc le contour d'intégration σ est de longueur finie, $\theta\sigma\varepsilon$ pourra être rendu aussi petit que l'on voudra et l'on aura

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots;$$

de plus, si l'on prend pour contour d'intégration un cercle infiniment petit décrit autour du point x intérieur au contour C comme centre, on aura

$$\int \frac{\varphi(z)}{(z-x)^2}\,dz = \int \frac{u_0(z)}{(z-x)^2}\,dz + \ldots + \int \frac{u_n(z)}{(z-x)^2}\,dz + \ldots,$$

c'est-à-dire précisément (p. 247)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots.$$

C. Q. F. D.

Remarques. — Il ne faudrait pas se tromper sur le sens du théorème précédent. D'abord nous renouvellerons ici l'observation déjà faite que les limites a et b doivent être finies et que l'arc d'intégration σ doit être fini. Mais il faut bien faire attention qu'il n'est permis de différentier une série comme un polynôme que si elle est uniformément convergente.

Il y a cependant encore un cas dans lequel on peut différentier les deux membres de l'équation

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

comme si le second membre était un polynôme d'un nombre fini de termes : c'est celui dans lequel la série

$$\psi(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots$$

est uniformément convergente; en effet, l'intégration donne

$$\int \psi(x)\,dx = u_0 + u_1 + \ldots + \text{const.};$$

donc

$$\int \psi(x)\,dx = \varphi(x) + \text{const.}$$

et, par suite,

$$\psi(x) = \varphi'(x).$$

Cauchy a fait connaître ses théorèmes dans son Cours professé à l'École Polytechnique. La notion de convergence uniforme n'intervient pas dans les énoncés qu'il en a donnés; mais, certainement, il n'y avait pas pour l'illustre auteur de doute à cet égard, ses démonstrations supposant implicitement l'uniformité de la convergence. Il ne considérait évidemment pas comme réellement convergentes les séries qui ne l'étaient pas uniformément, et nous pourrons dire à ceux qui voudraient voir ici Cauchy en défaut ce que M. Clebsch disait de Jacobi, à propos d'une légèreté qui lui avait été attribuée : *Jacobi wäre doch nicht so kurzsichtig gewesen.*

II. — Extension du théorème de Cauchy.

Nous avons vu que, si le long du contour ab la série

(1) $$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = f(x)$$

était uniformément convergente, on avait

(2) $$\int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \ldots = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Notre démonstration suppose la série (1) uniformément convergente même pour $x = a$ et $x = b$, au moins en apparence; mais cette condition n'est pas toujours nécessaire, et si : 1° la série

$$\int_a^x u_0\,dx + \int_a^x u_1\,dx + \ldots = \varphi(x)$$

est telle que, le point $b - h$ étant sur le contour d'intégration, on ait

$$\lim[\varphi(b) - \varphi(b-h)] = 0 \quad \text{pour } h = 0;$$

2° si la fonction $f(x)$ ne devient pas infinie pour $x = b$, on aura encore la relation (2), lors même que la série

$$u_0(b) + u_1(b) + \ldots$$

serait divergente. En effet, le point x étant situé entre a et b, on a

$$\int_a^x u_0\,dx + \int_a^x u_1\,dx + \ldots = \int_a^x f(x)\,dx,$$

et, cette formule étant vraie, quelque voisin que x soit de b, elle aura encore lieu pour $x = b$, les limites de ces deux membres étant les deux membres de (2).

Théorème. — *Lorsque la série*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = f(x)$$

est convergente pour une valeur $x = \beta$ *dont le module est* R, *on a, en appelant* $\beta - \alpha$ *une valeur de* x *voisine de* β,

mais intérieure au cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon R,

$$\lim[f(\beta-\alpha)-f(\beta)]=0 \quad \text{pour } \alpha=0.$$

Posons en effet

$$\varphi(x)=\sum_{0}^{n} a_n x^n, \qquad \psi(x)=\sum_{n+1}^{\infty} a_n x^n,$$

nous aurons

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

Par conséquent

$$f(\beta)=\varphi(\beta)+\psi(\beta),$$
$$f(\beta-\alpha)=\varphi(\beta-\alpha)+\psi(\beta-\alpha)$$

et

$$(3)\quad f(\beta-\alpha)-f(\beta)=\varphi(\beta-\alpha)-\varphi(\beta)+\psi(\beta-\alpha)-\psi(\beta);$$

or on a, pour $x=\beta-\alpha$,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots\\ &= a_{n+1}\beta^{n+1}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)^{n+1}+a_{n+2}\beta^{n+2}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)^{n+2}+\ldots;\end{aligned}$$

si nous supposons que $\beta-\alpha$ et β aient le même argument (ce qui, dans le cas général, est à peu près exact), on aura

$$\operatorname{mod}\psi(x) \quad \text{ou} \quad \operatorname{mod}\psi(\beta-\alpha)<\mathrm{M}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)^{n+1}.$$

M désignant la plus grande des quantités

$$\operatorname{mod} a_{n+1}\beta^{n+1}, \quad \operatorname{mod}(a_{n+1}\beta^{n+1}+a_{n+2}\beta^{n+2}) \quad \ldots,$$

il en résulte que

$$\operatorname{mod}[\psi(\beta-\alpha)-\psi(\beta)]<2\mathrm{M};$$

la formule (3) devient alors

$$f(\beta-\alpha)-f(\beta)=\varphi(\beta-\alpha)-\varphi(\beta)+2\theta\mathrm{M},$$

θ désignant une quantité de module inférieur à un. Or, en prenant n suffisamment grand, M peut être rendu moindre

qu'une quantité donnée ε; et, en faisant α suffisamment voisin de zéro, on pourra, après avoir choisi n, prendre

$$\varphi(\beta-\alpha)-\varphi(\beta),$$

tel que son module soit inférieur à ε; la formule précédente donnera alors

$$\operatorname{mod}[f(\beta-\alpha)-f(\beta)]<3\varepsilon;$$

donc

$$\lim[f(\beta-\alpha)-f(\beta)]=0.$$

Mais nous avons supposé β et $\beta-\alpha$ de même argument; soit alors α' un infiniment petit, tel que $\beta-\alpha'$ soit de module moindre que β, on peut prendre

$$f(\beta-\alpha)-f(\beta-\alpha')<\varepsilon,$$
$$f(\beta-\alpha)-f(\beta)<\varepsilon;$$

donc

$$\lim[f(\beta-\alpha')-f(\beta)]=0.$$

C. Q. F. D.

III. — Sur la continuité des fonctions représentées par des séries.

Lemme. — *Soient* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... *des fonctions de* x *synectiques à l'intérieur d'un contour fermé simple* C. *Supposons la série*

$$(1)\qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=f(x)$$

convergente à l'intérieur de ce contour; la série

$$(2)\qquad \frac{u_1\left(e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1\right)^\alpha}{\left[2\pi(t-1)\sqrt{-1}\right]^\alpha}+\ldots+\frac{u_n\left(e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1\right)^\alpha}{\left[2\pi(t-n)\sqrt{-1}\right]^\alpha}+\ldots$$

sera, quel que soit t *pour* α *entier* >1, *uniformément convergente à l'intérieur du contour* C, *pourvu que le coefficient de* $\sqrt{-1}$ *dans* t *reste fini.*

En effet, supposons d'abord que t ne soit aucun des entiers $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, positifs, la série

$$(3)\qquad \frac{1}{(t-1)^\alpha}+\frac{1}{(t-2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(t-n)^\alpha}+\ldots$$

est convergente; il y a plus, elle est absolument convergente, c'est-à-dire qu'elle ne perd pas sa convergence en remplaçant ses termes par leurs modules, et, en effet, en appelant ρ et ω le module et l'argument de t, cette série des modules est

$$\frac{1}{(1-2\rho\cos\omega+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}}}+\ldots+\frac{1}{(n^2-2n\rho\cos\omega+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}}}+\ldots;$$

elle a ses termes moindres que ceux de la série

$$\frac{1}{(1-\rho)^\alpha}+\frac{1}{(2-\rho)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(n-\rho)^\alpha}+\ldots,$$

ou au moins à partir d'un certain rang de la série

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots,$$

en faisant commencer la série (3) à partir d'un terme convenable. Cette série (3) restera encore absolument convergente en multipliant tous ses termes par $\left(\frac{e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^\alpha$; si l'on considère la série des modules des termes de la nouvelle série et qu'on en multiplie les termes respectivement par $\operatorname{mod} u_1$, $\operatorname{mod} u_2$, ..., $\operatorname{mod} u_n$, ..., qui sont des nombres qui restent au-dessous d'une limite fixe et même qui tendent vers zéro, on obtiendra une nouvelle série convergente *a fortiori*. Cette nouvelle série est celle des modules de la série (2), qui est donc absolument convergente et représente une fonction synectique.

Cette conclusion est encore exacte quand t est entier. En effet, si, par exemple, $t=2$, on peut faire abstraction du deuxième terme de la série (2); notre raisonnement prouve que la série (2) ainsi modifiée est absolument convergente; le terme supprimé est fini pour $t=2$: la série (2) elle-même est donc absolument convergente.

Posons maintenant

$$(4)\qquad \psi(x,t)=\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(x)\left[\frac{e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1}{2\pi(t-n)\sqrt{-1}}\right]^{\alpha};$$

en d'autres termes, appelons $\psi(x, t)$ la valeur de la série (2). La valeur de la série (1) ou $f(x)$ sera donnée par la formule

$$f(x)=\psi(x,1)+\psi(x,2)+\ldots+\psi(x,n)+\ldots,$$

et, si l'on fait attention que $\psi(x, n)$ est le résidu relatif au point n de $\frac{\psi(x,t)}{e^{2\pi\sqrt{-1}t}-1}2\pi\sqrt{-1}$,

$$f(x)=\sum \underset{t=n}{\mathcal{E}} \frac{\psi(x,t)2\pi\sqrt{-1}}{e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1}$$

ou bien

$$(5)\qquad f(x)=\int\frac{\psi(x,t)}{e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1}\,dt,$$

l'intégrale étant prise le long d'un rectangle infiniment allongé dont les sommets auront pour coordonnées $+\infty$ et ε, x_0 et ε, x_0 et $-\varepsilon$, ∞ et $-\varepsilon$, x_0 désignant un nombre compris entre 0 et 1 et ε un nombre positif fini; la formule (5) peut alors s'écrire

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x)=\int_{x_0}^{\infty}&\left[\frac{\psi(x,t-\varepsilon\sqrt{-1})}{e^{2\pi(t\sqrt{-1}+\varepsilon)}-1}-\frac{\psi(x,t+\varepsilon\sqrt{-1})}{e^{2\pi(t\sqrt{-1}-\varepsilon)}-1}\right]dt\\ &-\sqrt{-1}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\psi(x,x_0+t\sqrt{-1})}{e^{2\pi(x_0\sqrt{-1}-t)}-1}\,dt.\end{aligned}\right.$$

Je dis que les intégrales qui figurent dans cette formule sont des fonctions continues de x et que l'on peut leur appliquer les règles de la différentiation sous le signe $\int$; il ne peut y avoir de doute à cet égard que pour celles qui ont une limite infinie. Considérons donc l'une d'elles

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{\psi(x,t-\varepsilon\sqrt{-1})}{e^{2\pi(t\sqrt{-1}+\varepsilon)}-1}\,dt,$$

qui devient, en remplaçant ψ par sa valeur déduite de (4),

$$\int_{x_0}^{\infty} \sum u_n(x) \frac{\left[e^{2\pi(t\sqrt{-1}+\varepsilon)} - 1\right]^{\alpha-1}}{\left[2\pi(t\sqrt{-1} - n\sqrt{-1} + \varepsilon)\right]^{\alpha}} dt.$$

En remplaçant t par $\frac{1}{t}$, cette intégrale devient

$$\int_0^{\frac{1}{x_0}} \sum u_n(x) \frac{\left[e^{2\pi\left(\frac{1}{t}\sqrt{-1}+\varepsilon\right)} - 1\right]^{\alpha-1}}{t^2\left[2\pi\left(\frac{1}{t}\sqrt{-1} - n\sqrt{-1} + \varepsilon\right)\right]^{\alpha}} dt;$$

la fonction placée sous le signe $\int$ n'est jamais discontinue si l'on prend, par exemple, $\alpha = 4$, même pour $t = 0$; et la série soumise à l'intégration est toujours uniformément convergente; la dérivée relative à x de la quantité placée sous le signe $\int$ est également toujours finie; les intégrales qui figurent dans la formule (6) sont donc continues, et on peut leur appliquer les règles de la différentiation sous le signe $\int$. L'application de ces règles revient à y remplacer $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... par $u'_1(x)$, $u'_2(x)$, ..., et l'on constate alors que la valeur de $f'(x)$ est précisément

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots.$$

On verrait de même que $\int f(x)\,dx$ est égal à

$$\int u_1\,dx + \int u_2\,dx + \ldots + \int u_n\,dx + \ldots,$$

pourvu que le contour d'intégration ne sorte pas de l'aire limitée par le contour C et ne rencontre pas ce contour. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soient u_1, u_2, ..., u_n, ... des fonctions de x synectiques dans l'aire circonscrite par le contour*

simple C; *si la série*

$$(1)\qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente à l'intérieur de cette aire :

1° *La série* (1) *représente une fonction synectique dans cette aire.*

2° *L'intégrale de cette fonction prise le long d'un contour intérieur à cette aire, ou la dérivée de cette fonction à l'intérieur de cette aire, s'obtiendront en intégrant ou en différentiant tous les termes de la série.*

On a trouvé

$$(2)\qquad \frac{x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots;$$

mais, bien que pour des valeurs quelconques de x le second membre soit continu, on n'a pas pour des valeurs de x rendant ce second membre continu le droit de prendre les dérivées, ce qui donnerait le résultat absurde

$$\tfrac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots,$$

le second membre étant divergent, parce que la série (2) n'est pas convergente *dans* une aire, mais seulement *sur* l'axe des x.

IV. — Calcul des intégrales par les séries.

Lorsque les moyens que nous avons indiqués jusqu'ici pour le calcul des intégrales définies ne peuvent pas s'appliquer à l'évaluation d'une intégrale donnée, on essaye de la développer en série. A cet effet, on développe la quantité placée sous le signe $\int$ en une série de termes que l'on sait intégrer, et pour cela il y a en général plusieurs moyens.

Il semble que cette règle ne s'applique pas au cas où les limites de l'intégrale qu'il s'agit d'évaluer sont infinies, mais toute intégrale prise entre des limites infinies peut se ramener par un changement de variables, et cela de bien des manières,

à une autre prise entre des limites finies; on voit donc, en revenant des nouvelles variables aux anciennes, que l'on aura en général le droit d'appliquer la règle d'intégration par les séries au cas où les limites de l'intégration sont infinies. Cette conclusion, toutefois, tombe en défaut lorsque, par suite du changement de variable, la série à intégrer perd sa convergence; par exemple, la série

$$\frac{dx}{(1+x)^2}+\frac{dx}{(2+x)^2}+\frac{dx}{(3+x)^2}+\ldots$$

perd sa convergence pour $z=0$, quand on pose $x=\frac{1}{z}$; elle devient en effet

$$-\frac{dz}{(1+z)^2}-\frac{dz}{(2z+1)^2}-\frac{dz}{(3z+1)^2}-\ldots,$$

et l'on ne peut pas intégrer la série proposée entre 1 et ∞.

Nous ferons dans la suite un grand nombre d'intégrations par les séries. Je vais choisir ici, comme type de calcul, l'évaluation d'une intégrale très célèbre et que l'on rencontre souvent dans la théorie des Probabilités et dans certaines questions de Physique : je veux parler de l'intégrale

$$u=\int_0^x e^{-x^2}dx.$$

Une première méthode consiste à remplacer e^{-x^2} par son développement; on a alors

$$u=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1.2}-\ldots\pm\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots n}\mp\ldots\right)dx$$

ou, en intégrant chaque terme,

$$u=1-\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.2.5}-\frac{x^7}{1.2.3.7}+\ldots;$$

cette série est très convergente pour des valeurs de x inférieures à l'unité, mais elle l'est d'abord fort peu pour des valeurs un peu considérables de cette variable. Voici une

méthode qui conduit à un résultat très convergent quand x est plus grand que l'unité : posons

$$u' = \int_x^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_x^\infty \frac{1}{2x}\,e^{-x^2}\,2x\,dx;$$

en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{e^{-x^2}}{2x} + \int_x^\infty e^{-x^2}\,\frac{dx}{2x^2} \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \int_x^\infty e^{-x^2}\,\frac{1.3\,dx}{4x^3} \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{e^{-x^2}\,1.3.5}{8x^5} + \int_x^\infty e^{-x^2}\,\frac{1.3.5}{8x^5}.
\end{aligned}$$

Si x est un grand nombre, u' se développe en une suite de termes d'abord rapidement décroissants, mais l'intégrale qui joue le rôle de reste finit par croître; si l'on arrête la suite à ce moment, on peut obtenir la valeur de u' avec une très grande approximation; on a alors

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - \int_x^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - u'.$$

D'ailleurs, dans la suite u', le reste contient l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\,dx$$

dont on trouve une limite supérieure en la remplaçant par

$$e^{-x^2}\int_x^\infty \frac{dx}{x^{2n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+2}}\,\frac{1}{(2n+2)}.$$

Laplace a donné un autre moyen de calculer l'intégrale en question; en la désignant toujours par u, on a

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Posons

$$\mathrm{U} = e^{+x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt, \qquad u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathrm{U}\,e^{-x^2};$$

on en conclut, en représentant les dérivées par des accents,

$$U' = e^{x^2} 2x \int_x^\infty e^{-t^2} dt - e^{x^2} e^{-x^2}$$

ou

$$(1) \qquad U' = 2xU - 1;$$

différentiant n fois les deux membres, on trouve

$$(2) \qquad U^{(n+1)} = 2x U^{(n)} + 2n U^{(n-1)};$$

de (1) on tire

$$U = \frac{1}{2x - \frac{U'}{U}},$$

et de (2)

$$\frac{U^{(n)}}{U^{(n-1)}} = \frac{2n}{\frac{U^{(n+1)}}{U^{(n)}} - 2x} = \frac{-2n}{2x - \frac{U^{(n+1)}}{U^{(n)}}}.$$

Cette formule et la précédente donnent successivement

$$U = \cfrac{1}{2x + \cfrac{2}{2x - \cfrac{U''}{U'}}},$$

$$U = \cfrac{1}{2x + \cfrac{2}{2x + \cfrac{4}{2x - \cfrac{U'''}{U''}}}},$$

$$U = \cfrac{1}{2x + \cfrac{2}{2x + \cfrac{4}{2x + \cfrac{6}{2x + \dots}}}}$$

Tel est le développement en fraction continue de la fonction U, et qui fournit la méthode la plus avantageuse pour le calcul de la fonction U, lorsque x est très grand.

Voici une Table des valeurs les plus employées de la fonc-

tion $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$, Table qui est surtout utile aux personnes qui s'occupent du Calcul des probabilités :

$x =$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$
0	0
1	0,8427008
1,1630872	0,9
1,8213864	0,99
2,3276754	0,999
2,7510654	0,9999
3	0,99997
∞	1.

V. — Série de Bernoulli.

Si, dans la formule de Taylor

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots,$$

on fait $h=-x$, on trouve, en échangeant les termes $f(x+h)$ et $f(x)$,

$$f(x)=f(0)+xf'(x)-\frac{x^2}{1.2}f''(x)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(x)-\ldots;$$

c'est la formule dite *de Bernoulli*. Mais cette formule n'est autre chose que celle que fournirait l'intégration par parties de $f'(x)\,dx$. En effet,

$$\int_0^x f'(x)\,dx = xf'(x)-\int xf''(x)\,dx$$
$$= xf'(x)-\frac{x^2}{1.2}f''(x)+\int\frac{x^3}{1.2.3}f'''(x)\,dx\ldots$$

La formule de Bernoulli est donc loin d'avoir aujourd'hui l'importance que pouvait lui attacher son auteur; mais il convenait de la signaler, parce que son invention a précédé

celle de la formule de Taylor, ou tout au moins la *publicité* de cette dernière formule.

Sans préciser les limites entre lesquelles doit se faire l'intégration, on peut, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, par une répétition indéfiniment continuée de l'intégration par parties, obtenir une série qui pourra diverger ou converger suivant les cas, ou qui pourra donner une valeur approchée de l'intégrale en convergeant seulement dans ses premiers termes pour diverger dans la suite.

VI. — Application au développement de quelques fonctions.

On sait que l'on a, pour toutes les valeurs du module de x inférieures à l'unité,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \pm x^n \mp \ldots; \tag{1}$$

le second membre de cette formule est uniformément convergent pour toutes les valeurs de x contenues dans un cercle de rayon *un* décrit de l'origine comme centre (t. I, p. 34), mais non pas sur la circonférence de ce cercle. Considérons un contour intérieur à ce cercle de longueur finie, joignant l'origine au point x, et intégrons les deux membres de la formule (1) le long de ce contour; nous aurons, pour toutes les valeurs de x, telles que $\operatorname{mod} x < 1$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{n+1} \mp \ldots, \tag{2}$$

et la valeur de $\log(1+x)$ qui figure dans le premier membre a pour coefficient de $\sqrt{-1}$ l'argument de $(1+x)$ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; en effet, x variant à l'intérieur du cercle de rayon *un*, décrit de l'origine comme centre, à partir de zéro, l'argument de $1+x$ ne peut prendre des valeurs différant entre elles de plus de π et même de π. Si donc, pour $x = 0$, on prend $\arg(1+x) = 0$, jamais $\arg(1+x)$ ne prendra de

valeurs supérieures à $\frac{\pi}{2}$ ou inférieures à $-\frac{\pi}{2}$, et la valeur de $\log(1+x)$ qui figure dans (1), devant s'annuler pour $x=0$, doit avoir sa partie imaginaire, qui est $\sqrt{-1}\arg(1+x)$, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. La formule (2) a encore lieu pour $x=1$ (p. 276) et donne

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Considérons encore l'équation

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n} \mp \ldots,$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x de module moindre que *un*; le second membre est uniformément convergent sur tout contour intérieur au cercle de rayon *un* décrit de l'origine comme centre; alors, en intégrant le long d'un contour terminé aux points o et x, intérieur au cercle de convergence, on aura

$$(3)\qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x dont le module est moindre que *un*. La valeur de $\operatorname{arc\,tang} x$ qui figure dans le premier membre est définie par cette condition que, pour $x=0$, $\operatorname{arc\,tang} x = 0$ et que la valeur que prend $\operatorname{arc\,tang} x$ au point x, qui doit être de module moindre que *un*, s'obtient en faisant varier x d'une manière continue sans lui faire rencontrer la circonférence de rayon *un* décrite de l'origine comme centre, circonférence à l'intérieur de laquelle $\operatorname{arc\,tang} x$ est monodrome. Pour $x=1$, la formule (3) donne (p. 276)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots;$$

cette formule, très peu convergente, est tout à fait impropre au calcul de π. La formule (3) convenablement transformée

fournit, au contraire, un moyen très rapide pour le calcul de cette transcendante. Il est facile de constater que l'on a

$$(4)\qquad \frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arc\,tang}\frac{1}{5} - \mathrm{arc\,tang}\frac{1}{239}.$$

En effet

$$2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{1}{5} = \mathrm{arc\,tang}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \mathrm{arc\,tang}\frac{5}{12},$$

$$4\,\mathrm{arc\,tang}\frac{1}{5} = \mathrm{arc\,tang}\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \mathrm{arc\,tang}\frac{120}{119}$$

$$= \mathrm{arc\,tang}\left(1+\frac{1}{119}\right),$$

$$4\,\mathrm{arc\,tang}\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = \mathrm{arc\,tang}\frac{\frac{1}{119}}{1+\frac{120}{119}} = \mathrm{arc\,tang}\frac{1}{239},$$

d'où l'on tire la formule (4).

La formule (3) appliquée aux fonctions

$$\mathrm{arc\,tang}\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \mathrm{arc\,tang}\frac{1}{239}$$

donne alors

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right).$$

$\frac{\pi}{4}$ est donc la somme des valeurs de deux séries très convergentes.

La formule (2), d'après ce que l'on a vu (p. 176 et suivantes), a encore lieu pour $\mathrm{mod}\,x = 1$, pourvu que le second membre soit convergent, et l'on a alors, en faisant

$$x = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta,$$

$$\log(1+\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$= \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta - \frac{\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta}{2} + \ldots$$

ou, égalant de part et d'autre les coefficients de $\sqrt{-1}$ et les termes indépendants,

$$\frac{1}{2}\log[(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta] = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \ldots,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \ldots;$$

c'est-à-dire en observant que l'argument $\frac{\theta}{2}$ de $1+x$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$,

$$\log 2\cos\frac{\theta}{2} = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \ldots,$$

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \ldots.$$

Ces formules supposent θ compris entre $-\pi$ et $+\pi$. On voit, par exemple, que la seconde formule ne saurait convenir à toutes les valeurs de θ, puisque le second membre ne change pas quand θ augmente de 2π, tandis que le premier change évidemment.

Nous retrouverons ces formules dans un autre Chapitre et nous y verrons l'explication de cette espèce de paradoxe.

VII. — Sur la résolution des triangles par les séries.

Reprenons la formule (2) du paragraphe précédent; en y changeant x en $-(r\cos\theta + r\sqrt{-1}\sin\theta)$, elle devient, en vertu de la formule de Moivre,

$$\log(1 - r\cos\theta - r\sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$= -r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) - \frac{r^2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta)}{2} - \ldots$$

ou bien, en séparant les quantités réelles et imaginaires,

$$(1)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\log(1+r^2-2r\cos\theta) \\ \quad = \frac{r\cos\theta}{1} + \frac{r^2\cos 2\theta}{2} + \frac{r^3\cos 3\theta}{3} + \ldots, \end{cases}$$

$$(2)\quad \operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{1} + \frac{r^2\sin 2\theta}{2} + \frac{r^3\sin 3\theta}{3} + \ldots;$$

le premier membre de cette dernière formule doit être censé compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Posons maintenant $r=\frac{b}{a}$; en supposant $b<a$, on a

$$\frac{1}{2}\log a-\frac{1}{2}\log(a^2+b^2-2ab\cos\theta)=\frac{b}{a}\cos\theta+\frac{b^2}{2a^2}\cos2\theta+\ldots,$$

$$(3)\qquad \operatorname{arc\,tang}\frac{b\sin\theta}{a-b\cos\theta}=\frac{b}{a}\sin\theta+\frac{b^2}{2a^2}\sin2\theta+\ldots;$$

la première de ces formules peut s'écrire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\log(a^2+b^2-2ab\cos\theta)\\&\quad=\frac{1}{2}\log a-\left(\frac{b}{a}\cos\theta+\frac{b^2}{2a^2}\cos2\theta+\ldots\right);\end{aligned}\right.$$

elle fait connaître le logarithme du troisième côté d'un triangle ayant pour côtés a, b, l'angle compris étant θ. Cette formule sera avantageuse si le rapport $\frac{b}{a}$ est petit.

La formule (3) fait connaître l'angle opposé au côté b dans le même triangle; en appelant B cet angle, il est facile de voir en effet que

$$\operatorname{tang}B=\frac{b\sin\theta}{a-b\cos\theta}.$$

VIII. — Résolution de l'équation $\operatorname{tang}z=m\operatorname{tang}\alpha$.

On a souvent besoin de résoudre cette équation, en particulier en Astronomie quand on veut projeter un arc de grand cercle sur un autre. Dans ce cas, α étant l'arc à projeter, z sa projection, C l'angle de l'arc et de sa projection, on a

$$(1)\qquad \operatorname{tang}z=\operatorname{tang}\alpha\cos C$$

et $m=\cos C$.

La formule (2) du paragraphe précédent donne la solution de l'équation

$$(2)\qquad \operatorname{tang}z=m\operatorname{tang}\alpha;$$

on a, en changeant z en $\alpha - x$,

$$\operatorname{tang}(\alpha - x) = m \operatorname{tang}\alpha$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}(\alpha - x)}{\operatorname{tang}\alpha} = m$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\alpha - x)}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\alpha - x)} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

ou

$$\frac{\sin x}{\sin(2\alpha + x)} = \frac{1 - m}{1 + m};$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{tang} x = \frac{\dfrac{1 - m}{1 + m}\sin 2\alpha}{1 - \dfrac{1 - m}{1 + m}\cos 2\alpha}.$$

Si, dans la formule (2) du paragraphe précédent, on fait alors

$$r = \frac{1 - m}{1 + m} \qquad \text{et} \qquad \theta = 2\alpha,$$

on trouve

$$x = \frac{1 - m}{1 + m}\sin 2\alpha + \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^2 \frac{\sin 4\alpha}{2} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en remplaçant x par $\alpha - z$,

$$z = \alpha - \frac{1 - m}{1 + m}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)^2 \sin 4\alpha - \ldots;$$

si l'on fait $m = \cos C$, on trouve

$$\frac{1 - m}{1 + m} = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C,$$

et la solution de l'équation (1) est donnée par la formule

$$z = \alpha - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C \sin 2\alpha - \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} C \sin 4\alpha - \ldots.$$

Cette formule a été donnée par Lagrange dans les *Mémoires*

de l'Académie de Berlin. Elle fait connaître rapidement z quand l'angle C est petit. Dans ce cas, on a très approximativement

$$z = \alpha - \frac{C^2}{4}\sin 2\alpha.$$

IX. — Formule du binôme.

L'intégration ou la différentiation permet souvent de sommer les séries. Considérons, par exemple, la série

$$y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

qui, pour x réel et moindre que 1, représente $(1+x)^m$; en différentiant cette série uniformément convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à un, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1}x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \ldots$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = m\left[1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \ldots\right];$$

si l'on multiplie les deux membres par $x+1$, il vient

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = my;$$

on en tire

$$\frac{dy}{y} = \frac{m\,dx}{1+x}$$

ou

$$\log y = m\log(1+x) + \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$y = (1+x)^m K,$$

K désignant une constante que l'on trouve égale à un, si l'on observe que, pour $x = 0$, on a $y = 1$ et si l'on convient de

prendre la valeur de $(1+x)^m$, qui pour $x=0$ se réduit à l'unité ([1]); on a donc

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x telles que $\operatorname{mod} x < 1$.

X. — Théorème de Cauchy sur le développement des fonctions.

Soit $f(x)$ une fonction qui reste monodrome, monogène finie et continue (ou synectique) à l'intérieur d'un cercle de rayon R *décrit de l'origine comme centre, cette fonction sera développable par tous les points intérieurs à ce cercle, en série convergente, par la formule de Maclaurin.*

Pour le démontrer, nous partirons de la formule déjà citée tant de fois

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

et dans laquelle nous supposerons l'intégrale prise le long du cercle de rayon R, ou, si l'on veut, d'un cercle concentrique à celui-là et de rayon un peu moindre que R. Alors, x étant intérieur au contour d'intégration, on aura $\operatorname{mod} x < \operatorname{mod} z$, et l'on trouvera en série uniformément convergente

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \ldots;$$

par suite, (1) deviendra

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z)\,dz \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \ldots\right)$$

([1]) Ceci manque peut-être un peu de clarté, mais nous reviendrons bientôt sur ce sujet.

ou

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \Bigg[& \int \frac{f(z)\,dz}{z} \\ & + x\int \frac{f(z)\,dz}{z^2} + \ldots + x^n \int \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} + \ldots \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Or, d'après une formule connue (p. 247),

$$f^n(x) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

ou, pour $x = 0$,

$$f^n(0) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz;$$

la formule (2) donne alors

$$(3)\qquad f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1} + \ldots + x^n \frac{f^n(0)}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

C'est la formule de Maclaurin dont la convergence est assurée, sans qu'il soit besoin d'examiner si le reste tend vers zéro.

La fonction e^x, les fonctions $\sin x$, $\cos x$, ... sont synectiques dans toute l'étendue du plan : donc elles sont développables suivant les puissances de x, pour toutes les valeurs de x, ce que l'on savait.

Les fonctions rationnelles restent synectiques tant que leur dénominateur ne s'annule pas; elles seront donc développables tant que le module de la variable restera inférieur au module de la racine du dénominateur qui a le plus petit module.

$\operatorname{Log} x$ ne sera pas développable par la formule de Maclaurin, parce qu'il cesse d'être synectique pour $x = 0$, ...

Réciproquement, si une fonction est développable en série de la forme

$$(S)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

convergente, elle est synectique.

On sait en effet, par le théorème d'Abel, que la série (S), étant convergente pour une certaine valeur du module de x, est convergente pour tout module moindre, et que, pour chaque valeur de x ainsi choisie, elle représente une fonction continue et finie. On sait, par le théorème de la page 273, equ'ell a une dérivée; donc elle est synectique à l'intérieur du cercle de convergence.

On sait d'ailleurs que le développement de $f(x)$ ne peut pas se faire de deux manières différentes; il a donc lieu suivant la formule de Maclaurin.

XI. — Formule du binôme.

La fonction $(1+x)^m$, *quel que soit* m, *est monodrome, monogène, finie et continue, pour toutes les valeurs de* x *dont le module est inférieur à un, c'est-à-dire comprises à l'intérieur d'un cercle de rayon un décrit de l'origine comme centre* (*mais non sur la circonférence de ce cercle*).

En effet, on a

$$(\text{A}) \qquad (1+x)^m = [\text{mod}(1+x)]^m (\cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha);$$

α désignant l'argument de $1+x$, le module de $1+x$ et sa puissance m^e sont bien déterminés pour toutes les valeurs de x; mais, d'après ce qu'on a vu (p. 225), l'argument α de $1+x$ n'est monodrome qu'à l'intérieur des contours qui ne contiennent pas le point -1; donc cet argument, et par suite, en vertu de la formule (A), la fonction $(1+x)^m$, sera monodrome à l'intérieur du cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon un, puisque ce cercle ne contient pas le point -1. Donc :

$(1+x)^m$ *est développable par la formule de Maclaurin pour toutes les valeurs de* x *dont le module est moindre que un.*

En posant

$$f(x) = (1+x)^m,$$

on a

$$f^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^n(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1),$$

et la formule de Maclaurin donne

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} (1+x)^m = 1 &+ \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots \end{aligned}\right.$$

C'est la formule du binôme généralisée, et étendue au cas où x est imaginaire. La valeur de $(1+x)^m$ développée par cette formule est celle qui, sans cesser d'être monodrome dans le cercle de rayon un, décrit de l'origine comme centre, se réduit à 1, pour $x = 0$. Elle est caractérisée par ce fait que son argument reste compris entre $-\frac{m\pi}{2}$ et $+\frac{m\pi}{2}$.

On peut déduire de la formule du binôme plusieurs formules intéressantes : d'abord, si l'on change x en

$$r\cos\theta \pm \sqrt{-1}\, r\sin\theta,$$

on a

$$\begin{aligned}(1 + r\cos\theta \pm r\sqrt{-1}\sin\theta)^m = 1 &+ \frac{m}{1} r\cos\theta + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2\cos 2\theta + \ldots \\ &\pm \left(\frac{m}{1} r\sin\theta + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 \sin 2\theta + \ldots\right)\sqrt{-1}\,;\end{aligned}$$

donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(1 + r\cos\theta + r\sin\theta\sqrt{-1})^m + (1 + r\cos\theta - r\sin\theta\sqrt{-1})^m \\ &\quad = 2\left[1 + \frac{m}{1} r\cos\theta + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2\cos 2\theta + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(1 + r\cos\theta + r\sqrt{-1}\sin\theta)^m - (1 + r\cos\theta - r\sqrt{-1}\sin\theta)^m \\ &\quad = 2\left[\frac{m}{1} r\sin\theta + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2\sin 2\theta + \ldots\right]; \end{aligned}\right.$$

si, en particulier, on suppose $m = -1$, on a

$$(4)\quad \frac{1 + r\cos\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2} = 1 - r\cos\theta + r^2\cos 2\theta - r^3\cos 3\theta + \ldots,$$

$$(5)\quad \frac{r\sin\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2} = r\sin\theta - r^2\sin 2\theta + r^3\sin 3\theta - \ldots.$$

Ces formules (4) et (5) supposent $r < 1$; elles subsistent quand on change r en $-r$; en les intégrant de o à 2π, on trouve, en vertu des formules (p. 90), après avoir multiplié par $\cos m\theta$ ou $\sin m\theta$,

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \frac{1 + r\cos\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \pm \pi r^m,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \frac{r \sin\theta \, d\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2} = \pm \pi r^m$$

et, en changeant r en $-r$,

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \pi r^m,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \frac{r \sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta = \pi r^m.$$

Si dans la formule (1) on suppose x remplacé par x^2 et $m = -\frac{1}{2}$, on a

$$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 - \ldots,$$

et en intégrant de o à x, le module de x étant inférieur à un,

$$(6) \quad \log(x + \sqrt{1 + x^2}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} - \ldots;$$

on a de même

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \ldots,$$

et en intégrant de o à x

$$(7) \qquad \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Les formules (6) et (7) n'ont lieu, bien entendu, que si $\operatorname{mod} x < 1$ et les valeurs développées sont celles qui, sans cesser d'être monodromes, se réduisent à o pour $x = 0$.

XII. — Quelques autres développements.

La seule difficulté que l'on rencontre dans l'application de la formule de Maclaurin est la formation des dérivées successives des fonctions que l'on veut développer. Nous avons indiqué plus haut un moyen de former ces dérivées dans un grand nombre de cas; néanmoins, nous allons faire l'application de la formule de Maclaurin à quelques fonctions, à cause des développements importants auxquels elle conduit.

Proposons-nous de développer $\sin mx$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$. Posant $u = \sin mx$ et $y = \sin x$, on a $\sin mx = u = \sin(m \arcsin y)$: donc

$$\frac{du}{dy} = \frac{m\cos(m \arcsin y)}{\sqrt{1-y^2}}$$

ou

$$\frac{du}{dy} = m\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-y^2}}$$

ou

$$\left(\frac{du}{dy}\right)^2(1-y^2) = m^2(1-u^2);$$

la différentiation donne

$$2\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2}(1-y^2) - 2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 y = -2m^2 u\frac{du}{dy}$$

et, en divisant par $2\dfrac{du}{dy}$,

$$\frac{d^2u}{dy^2}(1-y^2) - y\frac{du}{dy} + m^2 u = 0.$$

Appliquons la formule de Leibnitz (t. I, p. 83) et différentions n fois de suite, nous aurons, en désignant les dérivées avec des indices,

$$u^{n+2}(1-y^2) - 2nu^{n+1}y - n(n-1)u^n - u^{n+1}y - nu^n + m^2u^n = 0;$$

pour $y=0$, on a

$$u^{n+2} - n(n-1)u^n - nu^n + m^2u^n = 0$$

ou

$$u^{n+2} = u^n(n^2 - m^2).$$

Appelons u_0 et u'_0 les valeurs de $\sin mx$ et de sa dérivée relative à $\sin x$; quand on suppose $\sin x = 0$, on aura

$$u'' = -u_0 m^2, \qquad u^{\text{IV}} = u_0 m^2(m^2 - 2^2), \qquad \ldots,$$

$$u''' = -u'_0(m^2 - 1^2), \qquad u^{\text{V}} = u'_0(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2), \qquad \ldots;$$

on pourra donc écrire le développement de $\sin mx$ en fonction de $\sin x$ par la formule de Maclaurin. Si l'on appelle α le plus petit arc positif ou négatif ayant pour sinus $\sin x$, et α' le plus petit arc ayant pour cosinus $\sin x$, on trouve

$$\cos m\alpha = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \ldots,$$

$$\sin m\alpha = m\left[\sin x - \frac{m^2-1^2}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots\right],$$

$$\cos m\alpha' = 1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \ldots,$$

$$\sin m\alpha' = m\left[\cos x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\cos^5 x - \ldots\right],$$

$$\begin{aligned}\cos mx &= \cos mk\pi \cos m\alpha \pm \sin mk\pi \sin m\alpha \\ &= \cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\cos m\alpha' \pm \sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\sin m\alpha',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin mx &= \sin mk\pi \cos m\alpha \pm \cos mk\pi \sin m\alpha \\ &= \sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\cos m\alpha' \mp \cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\sin m\alpha'.\end{aligned}$$

Les signes supérieurs correspondent au cas où k est pair : les signes inférieurs, au cas où il est impair. (Poinsot, *Analyse des sections angulaires.*)

Une foule de formules peuvent se démontrer de la même manière : ainsi, en posant

$$y = \arcsin x,$$

on a

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$y'^2(1-x^2) = 1;$$

en différentiant, il vient

$$2y'y''(1-x^2)-2xy'^2=0$$

ou, supprimant le facteur $2y'$,

$$y''(1-x^2)-xy'=0;$$

en différentiant n fois de suite par la formule de Leibnitz et en faisant $x=0$, on trouve

$$y^{n+2}=n^2y^n.$$

On en conclut

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

pour toutes les valeurs de x telles que $\bmod x < 1$.

En posant

$$y=(\arcsin x)^2,$$

on a

$$y'=2y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ou

$$y'\sqrt{1-x^2}=2y;$$

en différentiant une fois d'abord, en supprimant le facteur $2y'$, et en continuant le calcul comme tout à l'heure, on trouve

$$(\arcsin x)^2=x^2+\frac{2}{3}\frac{x^4}{2}+\frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4}+\ldots.$$

XIII. — Puissance d'une série.

On a quelquefois besoin de développer une expression de la forme $[f(x)]^m$, $\log f(x)$, $e^{f(x)}$, ... La formule de Maclaurin, même avec le perfectionnement de Cauchy, serait impropre à cet usage, à cause des difficultés que l'on éprouve à former les dérivées successives. Si l'on connaît le développement de $f(x)$, on en déduit celui de $[f(x)]^m$ comme il suit : soit

(1) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

on posera

$$u = [f(x)]^m,$$

d'où l'on déduit, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{u'}{u} = m\,\frac{f'(x)}{f(x)}$$

ou

$$u' f(x) - m u f'(x) = 0\,;$$

si l'on remplace alors $f(x)$ par sa valeur (1) et u par

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

on a

$$\begin{aligned} &[b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \ldots + (n+1) b_{n+1} x^n + \ldots](a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots) \\ &\quad - m[a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n+1) a_{n+1} x^n + \ldots](b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots) \end{aligned}$$

En effectuant les produits et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on trouve

$$\begin{aligned} &m a_1 b_0 - a_0 b_1 = 0, \\ &(m-1) a_1 b_0 + 2 m a_2 b_0 - 2 a_0 b_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(m-n) a_1 b_n + (2m - n + 1) a_2 b_{n-1} \\ &\quad + (3m - n + 2) a_3 b_{n-2} + \ldots + (mn - 1) a_n b_1 \\ &\qquad + m(n+1) a_{n+1} b_0 - (n+1) b_{n+1} a_0 = 0. \end{aligned}$$

En observant que $b_0 = a_0^m$, ces équations fourniront, soit sous forme de déterminants, soit par un calcul de proche en proche, les coefficients b_1, b_2, ..., b_n....

Si m est entier et positif, la série qui donne le développement de $[f(x)]^m$ aura un rayon de convergence au moins égal à celui de la série qui donne $f(x)$; sinon, une petite discussion sera nécessaire pour fixer le nouveau rayon de convergence.

Le développement de $\log f(x)$ s'obtient un peu plus simplement. En effet, en posant

$$u = \log f(x),$$

il vient

$$u' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{ou} \qquad u' f(x) = f'(x),$$

en sorte que, si l'on pose

$$u = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots,$$

on aura

$$(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$
$$= a_1 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + \ldots.$$

En égalant alors les coefficients de x, x^2, x^3, ... dans les deux membres et en observant que $C_0 = \log a_0$, on a une série d'équations du premier degré donnant C_1, C_2, ...

Enfin le développement de $e^{f(x)}$ s'obtiendra en posant

$$u = e^{f(x)}$$

et en prenant les dérivées logarithmiques

$$\frac{u'}{u} = f'(x),$$

d'où

$$u' = uf'(x);$$

en remplaçant u par $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots$, l'identification fera connaître C_0, C_1, C_2, ...

La même méthode s'appliquerait à la recherche des développements de $\sin f(x)$, $\cos f(x)$, ...

XIV. — Formule de Laurent.

Reprenons la formule (p. 246)

$$(1) \qquad f(x) = \mathcal{E} \frac{f(z)}{z - x},$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur d'une aire C où $f(z)$ reste synectique, et dans laquelle le résidu se rapporte à l'infini x contenu dans cette aire C.

Supposons actuellement que la fonction $f(z)$ reste synectique à l'intérieur et sur les contours d'une couronne circulaire, limitée par deux cercles de rayons R et r décrits de

l'origine comme centre. Pour évaluer dans ce cas le résidu qui entre dans (1), il faudra d'abord intégrer dans le sens direct, le long du cercle de rayon R, ce qui donnera

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta}{\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}-x}\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}},$$

puis dans le sens rétrograde, le long du petit cercle de rayon r, ce qui donnera

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta}{re^{\theta\sqrt{-1}}-x}re^{\theta\sqrt{-1}};$$

on aura donc, au lieu de (1),

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta}{\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}-x}\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}-\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta}{re^{\theta\sqrt{-1}}-x}re^{\theta\sqrt{-1}}\right].$$

Or, le module de x étant compris entre R et r, puisque x est supposé intérieur à la couronne C, les quantités placées sous le signe $\int$ seront développables, l'une suivant les puissances croissantes, l'autre suivant les puissances décroissantes de x, et l'on aura

$$\begin{aligned}f(x)= &+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})+\frac{x}{\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}}f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})+\ldots\right]d\theta\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{x}f(re^{\theta\sqrt{-1}})r^2e^{2\theta\sqrt{-1}}+\frac{1}{x^2}f(re^{\theta\sqrt{-1}})r^3e^{3\theta\sqrt{-1}}+\ldots\right]d\theta.\end{aligned}$$

$f(z)$ est donc développable en une double série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de x; le coefficient de x^n est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta}{\mathrm{R}^n e^{n\theta\sqrt{-1}}},$$

celui de x^{-n} est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta\,.\,r^{n+1}e^{(n+1)\theta\sqrt{-1}}.$$

La formule que nous venons d'établir est du commandant Laurent; c'est, comme l'on voit, une généralisation de celle de Cauchy (p. 294), et l'on peut dire que :

Théorème. — *Si une fonction est synectique à l'intérieur d'une couronne circulaire comprise entre deux cercles décrits de l'origine comme centre, elle est développable à l'intérieur de cette couronne en une double série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de x.*

Mais il est clair que cette propriété n'appartient plus aux points situés sur les cercles mêmes qui limitent la couronne.

XIV. — Du point de vue auquel on peut considérer les résidus.

Nous avons appelé, avec Cauchy, résidu de $f(z)$ relativement à une aire A l'intégrale $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)\,dz$ prise le long du contour de cette aire; mais, avant de donner cette définition du résidu, Cauchy appelait résidu de $f(z)$ relatif à un infini c de cette fonction le coefficient de $\frac{1}{z-c}$ dans le développement de $f(z)$ suivant les puissances de $\frac{1}{z-c}$. Cette définition rapprochait la notion du résidu de celle de la dérivée. D'après le théorème de Laurent, le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $f(x)$ est précisément $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)\,dz$, ce qui montre l'accord des deux définitions, car le coefficient de $\frac{1}{x-c}$ serait encore la même intégrale prise le long du cercle ayant pour centre, non plus l'origine, mais bien le point c. D'ailleurs, si l'on a

$$f(x) = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{(x-c)^2} + \ldots + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

en intégrant les deux membres le long d'un cercle décrit du point c comme centre, on a bien

$$\int f(z)\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\,A.$$

XV. — Quelques théorèmes concernant les produits infinis.

Le produit $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots$, composé d'un nombre infini de facteurs, est *convergent* lorsque le produit des n premiers facteurs tend vers une limite déterminée quand n croît indéfiniment. Cette limite est la *valeur* du produit.

Le produit

$$(1)\qquad (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots$$

pour être convergent doit évidemment être tel que son facteur général tende vers un; a_n doit donc avoir pour limite zéro.

Théorème I. — *Si $a_1, a_2, \ldots$ sont positifs, la condition nécessaire et suffisante pour que le produit* (1) *soit convergent est que la série $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ le soit.*

En effet, on a

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n) > 1+a_1+a_2+\ldots+a_n;$$

si donc la série croît indéfiniment, il en est de même du produit; par suite, si la série est divergente, le produit l'est. En second lieu, on a

$$1+a_1 < e^{a_1}, \qquad 1+a_2 < e^{a_2}\ldots;$$

donc

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < e^{a_1+a_2+\ldots+a_n};$$

or le produit croît avec n, mais il reste toujours moindre que $e^{\Sigma a}$, qui a une valeur déterminée, puisque la série est con-

vergente; donc le produit lui-même a une limite, c'est-à-dire est convergent. C. Q. F. D.

On remarquera que cette limite est différente de zéro.

THÉORÈME II. — *Si la série* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *à termes positifs est convergente, la série*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont les modules des différents termes sont $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, *est convergente et le produit*

$$(1) \qquad (1 + u_1)(1 + u_2)\ldots(1 + u_n)\ldots$$

l'est aussi.

Il suffit de prouver que la série

$$(2) \qquad l(1 + u_1) + l(1 + u_2) + \ldots + l(1 + u_n) + \ldots$$

est convergente, les logarithmes étant pris avec une valeur de leur argument comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (on suppose a_1, a_2, ... moindres que 1). On a

$$l(1 + u_1) = u_1 - \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_1^3}{3} - \ldots;$$

or

$$\operatorname{mod}\left(\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_1^3}{3} + \ldots\right) < \frac{1}{2}(a_1^2 + a_1^3 + \ldots) \quad \text{ou} \quad < \frac{a_1^2}{2(1 - a_1)};$$

on peut supposer $a_1 < \frac{1}{2}$, et l'on a

$$\operatorname{mod}\left(\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_1^3}{3} + \ldots\right) < a_1^2,$$

et $\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_1^3}{3} + \ldots$ peut être représenté par $\theta_1 a_1^2$, θ_1 désignant une quantité de module inférieur à 1; alors on a

$$\sum_1^n \log(1 + u_i) = \sum_1^n u_i + \sum_1^n \theta_i a_i^2.$$

Or $\sum_1^n u_i$ tend vers une limite, puisque la série $u_1 + u_2 + \ldots$ est convergente; la série $a_1 + a_2 + \ldots$ étant convergente, la série $a_1^2 + a_2^2 + \ldots$ le sera *a fortiori* et $\theta_1 a_1^2 + \theta_2 a_2^2 + \ldots$ le sera en vertu d'un théorème connu. Si donc on fait $n = \infty$, la formule précédente montre que $\sum_1^n \log(1 + u_i)$ a une limite, donc la série (2) est convergente et il en est de même du produit (1).

THÉORÈME III. — *Si la série à termes positifs*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

est convergente, le produit

$$(1 + a_1 r)(1 + a_2 r)\ldots(1 + a_n r)\ldots$$

sera convergent, si r est positif.

Car la série $a_1 r + a_2 r + \ldots + a_n r + \ldots$ est convergente et à termes positifs.

THÉORÈME IV. — *Si la série des modules* $a_1, a_2, \ldots$ *de* $u_1, u_2, \ldots$ *est convergente, le produit*

$$(1 + u_1 x)(1 + u_2 x)\ldots(1 + u_n x) + \ldots$$

sera convergent.

Parce que la série des modules de $u_1 x$, $u_2 x$ est convergente.

THÉORÈME V. — *Si la série des modules* $a_1, a_2, \ldots$ *de* $u_1, u_2, \ldots$ *est convergente, la fonction représentée par le produit*

$$(1 + u_1 x)(1 + u_2 x)\ldots(1 + u_n x)\ldots$$

est synectique dans toute l'étendue du plan.

En effet, soit r le module de x; considérons le produit convergent

$$(1+a_1 r)(1+a_2 r)\ldots(1+a_n r) = P_n.$$

Soient $s_1 = \Sigma a_i$, $s_2 = \Sigma a_i a_j$, $s_3 = \Sigma a_i a_j a_k$, ...; on aura

$$P_n = 1 + s_1 r + s_2 r^2 + \ldots + s_n r^n;$$

on a, en général, pour $\mu < n$ et $r = 1$, $s_\mu < P_n$ et *a fortiori* $s_\mu < P$, P désignant la limite de P_n pour $P = \infty$; or s_μ croît avec n, donc s_μ a une limite s'_μ quand on fait croître n indéfiniment. Maintenant soit

$$P'_m = 1 + s'_1 r + s'_2 r^2 + \ldots + s'_m r^m;$$

on a toujours $P_m < P$; si donc dans $s_1, s_2, \ldots, s_m$, seulement, on fait croître n, cette inégalité étant toujours satisfaite, on aura

$$P'_m \leq P;$$

mais on a certainement $P'_m < P$, car $P'_m < P'_{m+1}$ et $P'_{m+1} \leq P$; mais P'_m croît avec m, donc P'_m a une limite P' au plus égale à P; mais inversement

$$P_n < P';$$

or P_n croît avec n dans $P \leq P'$: donc enfin $P = P'$.

Maintenant considérons le produit

$$\Pi_n = (1+u_1 x)(1+u_2 x)\ldots(1+u_n x),$$

et soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ la somme des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ la somme de leurs produits deux à deux, etc., on aura

$$\Pi_n = 1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \ldots + \sigma_n x^n;$$

les sommes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ tendent vers des limites déterminées $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$, parce que les sommes des modules de leurs termes $s_1, s_2, \ldots$ tendent elles-mêmes vers des limites déterminées ([1]), soit

$$\Pi'_n = 1 + \sigma'_1 x + \sigma'_2 x^2 + \ldots + \sigma'_n x^n;$$

([1]) Les sommes $s_1, s_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ne sont pas à proprement parler des séries; mais il est facile de voir que, si $s_1, s_2, \ldots$ tendent vers des limites

or Π'_n a une limite quand on fait croître n indéfiniment, car la série des modules de ses termes $1 + s'_1 r + s'_2 r^2 + \ldots$ est convergente. Appelons Π' cette limite, je dis que $\Pi' = \Pi$; en effet, la différence entre Π'_n et Π_n a un module moindre que la différence entre P'_n et P_n; or $P'_n - P_n$ a pour limite zéro, donc Π'_n et Π_n ont la même limite.

Or la série

$$1 + \sigma'_1 x + \sigma'_2 x^2 + \ldots + \sigma'_n x^n + \ldots,$$

étant convergente dans toute l'étendue du plan, représente une fonction synectique. Le théorème se trouve donc démontré.

Corollaire. — La série

$$\log y = \log(1 + u_1 x) + \log(1 + u_2 x) + \ldots + \log(1 + u_n x) + \ldots$$

représente une fonction synectique de x à l'intérieur d'une série de couronnes circulaires dont les rayons successifs sont les quantités a_1^{-1}, a_2^{-1}, $\ldots$, a_n^{-1}, $\ldots$ rangées par ordre de grandeur, de sorte que l'on pourra écrire, en différentiant,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u_1}{1 + u_1 x} + \frac{u_2}{1 + u_2 x} + \ldots + \frac{u_n}{1 + u_n x} + \ldots.$$

XVII. — Conversion des produits en séries.

Si l'on forme les quantités

$$1 - \frac{a_1}{a_1 + 1}, \quad 1 - \frac{a_1}{a_1 + 1} - \frac{a_2}{(a_1 + 1)(a_2 + 1)}, \quad \ldots,$$

a_1, a_2, $\ldots$ désignant des quantités quelconques, on trouve

$$1 - \frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{1}{a_1 + 1},$$

$$1 - \frac{a_1}{a_1 + 1} - \frac{a_2}{(a_1 + 1)(a_2 + 1)} = \frac{1}{a_1 + 1} - \frac{a_2}{(a_1 + 1)(a_2 + 1)}$$
$$= \frac{1}{(a_1 + 1)(a_2 + 1)},$$

déterminées, σ_1, σ_2, $\ldots$ tendront aussi vers des limites déterminées, en raisonnant comme on l'a fait quand il s'est agi de véritables séries.

et, en continuant ainsi, on parvient à la formule

$$(1)\quad \begin{cases} 1 - \dfrac{a_1}{a_1+1} - \dfrac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)} - \dots \\ \qquad - \dfrac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)} \\ \qquad = \dfrac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)}. \end{cases}$$

Il en résulte que, si le produit

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\dots$$

est convergent, ou a un module indéfiniment croissant, la série suivante sera convergente

$$\frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)} + \dots + \frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)} + \dots;$$

et si P désigne la valeur finie ou infinie du produit, si S désigne celle de la série, on aura

$$1 - S = \frac{1}{P}$$

ou

$$S = 1 - \frac{1}{P}, \qquad P = \frac{1}{1-S}.$$

De là un moyen de convertir un produit en série ou *vice versa*.

Pour transformer un produit en série, on peut encore faire usage de l'identité

$$(2)\quad \begin{cases} (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \\ \quad = 1 + a_1 + (1+a_1)a_2 + (1+a_1)(1+a_2)a_3 + \dots \\ \qquad + (1+a_1)\dots(1+a_{n-1})a_n, \end{cases}$$

bien facile à démontrer de proche en proche.

On voit que, si la série $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ est convergente et à termes positifs, la suivante

$$1 + a_1 + (1+a_1)a_2 + \dots + (1+a_1)\dots(1+a_{n-1})a_n + \dots$$

le sera aussi, puisque le produit $(1+a_1)(1+a_2)\dots$ l'est. On voit aussi que, si le module de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a une limite infé-

rieure à 1, la série du second membre de (2) sera convergente, et par suite le produit

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots$$

le sera aussi. La formule (1) contient implicitement un grand nombre de séries; si l'on fait, par exemple,

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = \frac{1}{3}, \qquad \ldots,$$

on trouve

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} - \ldots = 0$$

ou bien

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots,$$

ce qu'il est aisé de vérifier.

XVIII. — Séries d'Euler.

Posons

$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots(1+a^nx) = F_n(a, x);$$

on a évidemment

(1) $$F_n(a, x)(1+a^{n+1}x) = F_n(a, ax)(1+ax).$$

Si l'on pose alors

$$F_n(a, x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n,$$

on aura, en vertu de la formule (1),

$$(1 + A_1x + \ldots + A_nx^n)(1+a^{n+1}x)$$
$$= (1 + a_1A_1x + \ldots + A_na^nx^n)(1+ax);$$

si l'on égale les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on trouve

$$1 = 1,$$

$$A_1 + a^{n+1} = A_1a + a, \qquad A_1 = a\frac{1-a^n}{1-a},$$

$$A_2 + A_1a^{n+1} = A_2a^2 + A_1a^2, \qquad A_2 = a^{1+2}\frac{1-a^n}{1-a}\frac{1-a^{n-1}}{1-a^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on a donc le développement de $F_n(a, x)$ ou

$$(2)\quad \begin{cases} (1+ax)(1+a^2x)+\ldots+(1+a^nx) \\ = 1+\dfrac{1-a^n}{1-a}ax+\dfrac{1-a^n}{1-a}\,\dfrac{1-a^{n-1}}{1-a^2}a^{1+2}x^2+\ldots+a^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n. \end{cases}$$

Corollaire I. — On voit que les expressions

$$\frac{1-a^n}{1-a},\quad \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)},\quad \ldots$$

sont des polynômes entiers en a.

Corollaire II. — La formule (2), lorsque $\operatorname{mod} a < 1$, a encore lieu pour $n = \infty$. En effet, le produit

$$(1+ax)(1+a^2x)\ldots(1+a^nx)\ldots = F_n(a, x)$$

est alors convergent et représente une fonction toujours monodrome, monogène finie et continue; on peut donc développer $F_n(a, x)$ en série convergente par la formule de Maclaurin et poser

$$F_n(a, x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots;$$

on détermine les coefficients A_1, A_2, ... au moyen de la relation

$$F_n(a, x) = F(a, ax)(1+ax),$$

à laquelle se réduit (1) pour $n = \infty$, et l'on trouve, en faisant les mêmes calculs que tout à l'heure,

$$(1+ax)(1+a^2x)\ldots(1+a^nx)$$
$$= 1+\frac{ax}{1-a}+\frac{a^{1+2}x^2}{(1-a)(1-a^2)}+\ldots+\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n}{(1-a)(1-a^2)\ldots(1-a^n)}+\ldots.$$

Si l'on pose

$$F_{-n}(a, x) = \frac{1}{(1+ax)(1+a^2x)\ldots(1+a^nx)},$$

la fonction $F_{-n}(a, x)$ sera développable par la formule de Maclaurin pour toutes les valeurs de x, telles que

$$\operatorname{mod} ax < 1,\qquad \operatorname{mod} a^2x < 1,\qquad \ldots,\qquad \operatorname{mod} a^nx < 1.$$

En posant

$$F_{-n}(a, x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

on déterminera A_1, A_2, ... comme dans la question précédente, en observant que

$$F_{-n}(a, x)(1 + ax) = F_{-n}(a, ax)(1 + a^{n+1}x);$$

on trouvera ainsi

$$\frac{1}{(1+ax)(1+a^2x)\ldots(1+a^nx)} = 1 - \frac{1-a^n}{1-a}ax + \frac{(1-a^n)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-a^2)}a^2x^2 - \ldots,$$

et, pour $n = \infty$, en supposant $\operatorname{mod} a < 1$, $\operatorname{mod} ax < 1$,

$$\frac{1}{(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots} = 1 - \frac{ax}{1-a} + \frac{a^2x^2}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{a^3x^3}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \ldots.$$

Une analyse toute semblable à celle que nous venons de développer conduit aux formules suivantes :

$$(1+ax)(1+a^3x)\ldots(1+a^{2n-1}x) = 1 + \frac{1-a^{2n}}{1-a^2}ax + \frac{(1-a^{2n})(1-a^{2n-2})}{(1-a^2)(1-a^4)}a^{1+3}x^2 + \ldots + a^{n^2}x^n.$$

Et, pour $\operatorname{mod} a < 1$,

$$(1+ax)(1+a^3x)(1+a^5x)\ldots = 1 + \frac{a^2x}{1-a^2} + \frac{a^4x^2}{(1-a^2)(1-a^4)} + \ldots + \frac{a^{n^2}x^n}{(1-a^2)(1-a^4)\ldots(1-a^{n^2})} + \ldots.$$

Et, pour $\operatorname{mod} a < 1$, $\operatorname{mod} ax < 1$,

$$\frac{1}{(1+ax)(1+a^3x)(1+a^5x)\ldots} = 1 - \frac{ax}{1-a^2} + \frac{a^2x^2}{(1-a^2)(1-a^4)} - \frac{a^3x^3}{(1-a^2)(1-a^4)(1-a^6)} + \ldots.$$

Gauss a examiné le cas où a était égal à ± 1; nous allons faire connaître les résultats auxquels il est parvenu.

XIX. — Formules de Gauss.

En posant

$$f(x, m) = 1 - \frac{1-x^m}{1-x} + \frac{1-x^m}{1-x}\,\frac{1-x^{m-1}}{1-x^2} - \ldots \pm 1,$$

on a

$$f(x, 1) = 1 - 1 = 0,$$

$$f(x, 2) = 1 - \frac{1-x^2}{1-x} + 1 = 1 - x,$$

$$f(x, 3) = 1 - \frac{1-x^3}{1-x} + \frac{1-x^3}{1-x}\,\frac{1-x^2}{1-x^2} - 1 = 0,$$

$$f(x, 4) = (1-x)(1-x^3),$$

$$f(x, 5) = 0,$$

$$f(x, 6) = (1-x)(1-x^3)(1-x^5);$$

on soupçonne les formules

$$f(x, 2m+1) = 0,$$

$$f(x, 2m) = (1-x)(1-x^3)\ldots(1-x^{2m-1}).$$

Essayons de prouver que

$$f(x, 2m+2) = f(x, 2m)(1-x^{2m+1})$$

ou que, plus généralement,

(1) $$f(x, m+2) = f(x, m)(1-x^{m+1});$$

on a

$$(x, m)(1-x^{m+1}) = 1 - x^{m+1} - \frac{(1-x^{m+1})(1-x^m)}{1-x} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^{m+1}-x^{m+2}}{1-x}\right) - \left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x} - \frac{x^m - x^{m+2}}{1-x^2}\,\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\right)$$

$$+ \left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\,\frac{1-x^m}{1-x^2} - \frac{x^{m-1}-x^{m+1}}{1-x^3}\,\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\,\frac{1-x^m}{1-x^2}\right) - \ldots$$

$$= 1 - \frac{1-x^{m+2}}{1-x} + \frac{1-x^{m+2}}{1-x}\,\frac{1-x^{m+1}}{1-x^2} - \ldots,$$

ce qui démontre la formule (1). On a donc

$$f(x, 2m+1) = 0,$$

$$f(x, 2m) = (1-x)(1-x^3)\ldots(1-x^{2m-1}).$$

Quoi qu'il en soit, on posera toujours

$$f(x, m) = 1 - \frac{1-x^m}{1-x} + \frac{1-x^m}{1-x}\,\frac{1-x^{m-1}}{1-x^2} - \ldots.$$

On a, pour $x < 1$,

$$f(x, \infty) = 1 - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} - \ldots;$$

d'ailleurs de (1) on tire

$$\begin{aligned} f(x, m) &= f(x, m-2)(1-x^{m-1}) \\ &= f(x, m-4)(1-x^{m-1})(1-x^{m-3})\ldots, \end{aligned}$$
$$f(x, m) = f(x, -\infty)(1-x^{m-1})(1-x^{m-3})\ldots.$$

La fonction $f(x, m)$ donne, au moyen de (1),

$$f(x, -2) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}, \qquad f(x, -4) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^3}\right)};$$

par suite, pour $m = -\infty$ et $x > 1$,

$$1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x^2-1)} + \ldots = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\ldots}.$$

On a donc

$$f(x, m) = \frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-3})\ldots}{(1-x^{-1})(1-x^{-3})\ldots}.$$

C'est la formule de Gauss; pour $m = -1$, on a

$$\begin{aligned} f(x, -1) &= \frac{(1-x^{-2})(1-x^{-4})\ldots}{(1-x^{-1})(1-x^{-3})\ldots} \\ &= 1 + x^{-1} + x^{-3} + \ldots + x^{-n^2+n} + \ldots. \end{aligned}$$

XX. — Développement d'une fonction en fractions rationnelles.

Soient $f(z)$ une fonction monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ses infinis ; l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{x-z}\,dz,$$

prise le long d'un contour C de dimensions infinies en tous sens, aura pour valeur la somme des résidus de la fonction $\frac{f(z)}{x-z}$. Le résidu relatif à x est $-f(x)$, les résidus relatifs aux infinis de $f(z)$ seront de la forme

$$\frac{1}{x-\alpha}\lim[f(z)(z-\alpha)]_{z=\alpha},$$

s'ils sont simples, ou de la forme

$$\left\{\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{(z-\alpha)^n f(z)}{x-z}\right]\right\}_{z=\alpha},$$

s'ils sont multiples et d'ordre de multiplicité n. Quoi qu'il en soit, en désignant par $R_1, R_2, \ldots$ les résidus de $\frac{f(z)}{x-z}$ relatifs aux infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, on aura

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{x-z}\,dz = -f(x) + R_1 + R_2 + \ldots + R_\mu,$$

μ désignant le nombre des infinis contenus dans le contour C. Si, pour une forme particulière de ce contour, l'intégrale contenue dans le premier membre tend vers zéro, on aura en série convergente

$$f(x) = R_1 + R_2 + \ldots + R_\mu + \ldots,$$

et il est important, pour la validité de ce théorème, que R_1, $R_2, \ldots$ soient écrits dans l'ordre où ils se succèdent quand le contour C grandit.

Considérons, par exemple, une fraction rationnelle proprement dite, c'est-à-dire dont le numérateur soit de degré inférieur au dénominateur, $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\frac{dz}{x-z}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)\frac{dz}{x-z},$$

prise le long d'un contour circulaire décrit de l'origine comme centre avec un rayon infini r, sera nulle; en effet, l'intégrale en question s'obtenant en posant

$$z=re^{\theta\sqrt{-1}} \qquad \text{et} \qquad dz=re^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\,d\theta,$$

sa valeur sera

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z)\frac{z\,d\theta}{x-z};$$

le long d'un cercle de rayon infini r, $\frac{z}{x-z}$ tend vers l'unité; si donc $f(z)$ tend vers zéro, ce qui a lieu dans le cas actuel, l'intégrale en question sera nulle; on aura donc

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\Sigma R.$$

Or, si α est une racine de $\psi(x)=0$ d'ordre de multiplicité n, on trouvera pour le résidu correspondant

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}\left[\frac{\varphi(\alpha)}{\theta(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha}\right],$$

$\theta(x)$ désignant, pour abréger, le quotient de $\psi(x)$ par $(x-\alpha)^n$; on a ainsi la formule de décomposition suivante

$$(1)\qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}\left[\frac{\varphi(\alpha)}{\theta(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha}\right]$$

due à Cauchy, et que l'on peut retrouver par des procédés plus élémentaires (p. 7).

XXI. — Développement de tang$x$, cot$x$, ...; construction des Tables de sinus.

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

dont la connaissance de la valeur doit décider de la possibilité du développement, sera toujours nulle quand le contour C sera circulaire et que $f(z)$ tendra vers zéro à mesure que le contour s'éloignera; il n'est malheureusement pas toujours possible de faire usage du contour circulaire.

La fonction tang$z$ est indéterminée pour $z=\infty$, mais on a

$$\frac{\operatorname{tang} z}{z}=\frac{e^{z\sqrt{-1}}-e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}}}\,\frac{1}{z\sqrt{-1}},$$

et pour les valeurs infinies de z qui n'annulent pas le dénominateur $\frac{\operatorname{tang} z}{z}$ est nul quand le module de z est infini; on pourra donc écrire, en observant que les infinis sont $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\operatorname{tang} x}{x}=\sum\frac{1}{x-\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)}\lim\left\{\left[z-\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\operatorname{tang} z}{z}\right\}$$

ou

$$(a)\qquad \frac{\operatorname{tang} x}{x}=\left[\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}\right]\frac{2}{\pi}+\left[\frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3\pi}{2}}\right]\frac{2}{3\pi}+\ldots.$$

La fonction cot$z$ est aussi indéterminée pour $z=\infty$, mais on peut encore développer $\frac{\cot z}{z}$, qui est nul pour $z=\infty$; le résidu de $\frac{\cot z}{z}\,\frac{1}{x-z}$ relatif à $z=0$ est la dérivée pour $z=0$ de

$$\frac{z}{\operatorname{tang} z}\,\frac{1}{x-z};$$

on trouve, en effectuant les calculs, $\frac{1}{x^2}$, de sorte que l'on a,

en observant que les infinis de $\cot z$ sont de la forme $k\pi$,

$$\frac{\cot x}{x} = \frac{1}{x^2} + \sum \frac{1}{x - k\pi} \lim \left[(z - k\pi) \frac{\cot z}{z} \right]$$

ou, en mettant en évidence les valeurs positives et négatives de k,

$$(b) \qquad \frac{\cot x}{x} = \frac{1}{x^2} + \sum \left[\frac{1}{x - k\pi} - \frac{1}{x + k\pi} \right] \frac{1}{k\pi}.$$

Et les séries (a) et (b) sont uniformément convergentes, comme il est facile de s'en assurer.

On peut écrire la formule (a) ainsi

$$(1) \qquad \tang x = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \ldots;$$

on trouve d'une manière analogue, au lieu de (b),

$$(2) \qquad \cot x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - \pi^2} + \frac{2x}{x^2 - 4\pi^2} + \frac{2x}{x^2 - 9\pi^2} + \ldots.$$

En intégrant les deux membres de ces équations, il vient

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \log\cos x = \log\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \\ + \log\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \log\sin x = \log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \\ + \log\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) + \ldots; \end{aligned} \right.$$

on détermine les constantes d'intégration en faisant $x = 0$ et en observant que $\log\sin x - \log x = 0$ pour $x = 0$. En repassant des logarithmes aux nombres, on a

$$(5) \quad \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \cdots \left[1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right] \cdots,$$

$$(6) \qquad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \cdots.$$

Les formules (3) et (4), si l'on développe les logarithmes en série (p. 287), donnent

$$(7)\quad \log\cos x = -\left[\frac{4x^2}{\pi^2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4x^2}{\pi^2}\right)^2\sigma_4 + \frac{1}{3}\left(\frac{4x^2}{\pi^2}\right)^3\sigma_6 - \ldots\right],$$

$$(8)\quad \log\sin x = \log x - \left[\frac{x^2}{\pi^2}s_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)^2 s_4 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)^3 s_6 - \ldots\right],$$

en posant, pour abréger,

$$\sigma_i = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^i} + \frac{1}{5^i} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^i} + \ldots,$$

$$s_i = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \ldots + \frac{1}{n^i} + \ldots.$$

σ_2, σ_4, ..., s_2, s_4, ... ou même $\frac{4}{\pi^2}\sigma_2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)\sigma_4$, ... et $\frac{4}{\pi^2}$, $\frac{1}{2}\frac{s_4}{\pi^4}$, ... se calculent une fois pour toutes; on a alors dans (7) et (8) deux formules dont on peut faire usage pour le calcul des Tables de logarithmes-sinus et cosinus. Pour la pratique des calculs, on pourra consulter l'Introduction placée en tête des Tables de Callet.

Considérons la fonction $\operatorname{coséc} z = \frac{1}{\sin z}$; nous pourrions encore faire usage du contour circulaire, mais nous pouvons aussi prendre pour C un contour rectangulaire ayant son centre à l'origine; on a, en effet, le long d'un pareil contour supposé de dimensions infinies,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{x-z} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int\frac{f(z)}{z}dz + x\int\frac{f(z)}{z(z-x)}dz\right]$$

ou, en prenant $f(z) = \frac{1}{\sin z}$,

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int\frac{dz}{z\sin z} + x\int\frac{dz}{z(z-x)\sin z}\right].$$

La première intégrale est nulle, parce que, le long de deux côtés opposés du parallélogramme, $z\sin z$ reprend les mêmes valeurs, tandis que dz y a des valeurs égales et de signes

contraires; quant au coefficient de x, comme on peut faire en sorte que $\sin z$ ne soit pas nul, cette intégrale sera nécessairement nulle, comme on peut s'en assurer en faisant

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

et en supposant alternativement $x = \infty$, $y = \infty$. On trouve alors

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - \pi^2} + \frac{2x}{x^2 - (2\pi)^2} - \frac{2x}{x^2 - (3\pi)^2} + \ldots,$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \frac{3\pi}{3^2\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{5\pi}{5^2\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \ldots.$$

On peut facilement déduire de ces développements ceux des tangentes, cotangentes, sécantes et cosécantes hyperboliques : il suffit pour cela d'y changer x en $x\sqrt{-1}$; ainsi l'on trouve

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + \pi^2} + \frac{2x}{x^2 + 4\pi^2} + \ldots,$$

$$\frac{e^{+x} - e^{-x}}{e^{+x} + e^{-x}} = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + x^2} + \ldots.$$

Si dans la formule (6) on fait $x = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}.$$

XXII. — Développements de $\tan x$, $\cot x$, ..., nombres de Bernoulli.

Reprenons les formules démontrées au paragraphe précédent :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2 + \pi^2} + \frac{2x}{x^2 + 4\pi^2} + \ldots,$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + x^2} + \ldots;$$

si nous posons

$$s_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sigma_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots,$$

et si nous développons chaque fraction suivant les puissances croissantes de x, en supposant $\mathrm{mod}\, x < \pi$ dans la première formule, et $\mathrm{mod}\, x < \frac{\pi}{2}$ dans la seconde, nous aurons

$$(1)\qquad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} = \frac{2x}{\pi^2} s_2 - \frac{2x^3}{\pi^4} s_4 + \frac{2x^5}{\pi^6} s_6 - \ldots,$$

$$(2)\qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2x\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sigma_2 - 2x^3\left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sigma_4 + 2x^5\left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sigma_6 - \ldots;$$

ces formules, en changeant x en $x\sqrt{-1}$, donnent

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\cot x + \frac{1}{2x} = \frac{x}{\pi^2} s_2 + \frac{x^3}{\pi^4} s_4 + \ldots,$$

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\operatorname{tang} x = x\left(\frac{2}{\pi}\right)\sigma_2 + x^3\left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sigma_4 + \ldots.$$

Retranchons l'unité des deux membres de (1) : nous trouverons

$$\frac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi^2} s_2 - \frac{x^3}{\pi^4} s_4 + \ldots$$

ou bien

$$\frac{1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi^2} s_2 - \frac{x^3}{\pi^4} s_4 + \ldots,$$

et, en changeant x en $\frac{x}{2}$,

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi^2}\frac{s_2}{2} - \frac{x^3}{\pi^4}\frac{s_4}{2^3} + \ldots,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(5)\qquad \frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{\pi^2}\frac{s_2}{2}-\frac{x^4}{\pi^4}\frac{s_4}{2^3}+\dots.$$

Si l'on pose

$$(6)\qquad \frac{x}{e^x-1}=1+\frac{B_1x}{1}+\frac{B_2x^2}{1.2}+\dots+\frac{B_nx^n}{1.2.3\dots n}+\dots.$$

B_1, B_2, ... sont ce que l'on appelle les *nombres de Bernoulli*. On voit que

$$B_1=-\tfrac{1}{2},\quad B_3=0,\quad B_5=0,\quad \dots,\quad B_{2n+1}=0,$$

$$B_2=\frac{2s_2}{2\pi^2}2!,\quad B_4=-\frac{2s_4}{(2\pi)^4}4!,\quad B_6=\frac{2s_6}{(2\pi)^6}6!\quad \dots\quad B_{2n}=\mp\frac{2s_{2n}}{(2\pi)^{2n}}(2n)!.$$

Les nombres de Bernoulli sont tous rationnels. C'est ce dont on s'assure en observant que la formule (6) donne

$$x=(e^x-1)\left(1+\frac{B_1x}{1}+\frac{B_2x^2}{1.2}+\dots\right)$$

ou, en remplaçant e^x-1 par son développement,

$$x=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\dots\right)\left(1+\frac{B_1x}{1}+\frac{B_2x^2}{1.2}+\dots\right);$$

identifiant les deux membres, on trouve

$$1=1,$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{B_1}{1}\frac{1}{1}=0,$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{B_1}{1}\frac{1}{1.2}+\frac{B_2}{1.2}\frac{1}{1}=0,$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{B_1}{1}\frac{1}{1.2.3}+\frac{B_2}{1.2}\frac{1}{1.2}+\frac{B_3}{1.2.3}\frac{1}{1}=0,$$

....

Ces formules permettent de calculer B_1, B_2, B_3, ..., de proche en proche, sans ambiguïté et sous une forme rationnelle.

Il résulte de là que les nombres s_2, s_3, ... ne contiennent

pas d'autre irrationnelle numérique que le nombre π. On voit que l'on a

$$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2\,B_1}{1} + 2\,\frac{B_2(2x)}{1.2} + 2\,\frac{B_3(2x)^2}{1.2.3} + \ldots$$

En changeant x en $x\sqrt{-1}$ et en observant que $B_1 = -\frac{1}{2}$, on a

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_2 x}{1.2} + \frac{2^4 B_4 x^3}{1.2.3.4} - \ldots$$

Nous donnons ci-dessous la Table des premiers nombres de Bernoulli, pris en valeur absolue avec leurs logarithmes.

Nombres B.	Logarithmes.
$B_2 = \frac{1}{6}$	$\bar{1},2218487$
$B_4 = \frac{1}{30}$	$\bar{2},5228787$
$B_6 = \frac{1}{42}$	$\bar{2},3767507$
$B_8 = \frac{1}{30}$	$\bar{2},5228787$
$B_{10} = \frac{5}{66}$	$\bar{2},8794261$
$B_{12} = \frac{691}{2730}$	$\bar{1},4033154$
$B_{14} = \frac{7}{6}$	0,0669468
$B_{16} = \frac{3617}{710}$	0,8507783
B_{18}	1,7401350
B_{20}	2,7235577
B_{30}	8,7792940
B_{40}	16,2854803
B_{50}	24,8751114
B_{60}	34,3304127

XXIII. — Expression des nombres de Bernoulli par des intégrales définies.

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 (\log x)^n x^p \, dx = -\int_0^1 \frac{n}{p+1} (\log x)^{n-1} x^p \, dx$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^n} \int_0^1 x^p \, dx$$
$$= (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Ceci posé, on a, en supposant $\alpha < 1$ et $x \leqq 1$,

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \ldots;$$

multiplions par $(\log x)^n dx$ et intégrons de 0 à 1, en vertu de la formule précédente, on aura

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^n dx}{1-\alpha x} = n!(-1)^n \left(1 + \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha^2}{3^{n+1}} + \ldots\right);$$

si, dans cette formule, on fait $x = e^{-z}$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{z^n dz}{e^z - \alpha} = n! \left(1 + \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha^2}{3^{n+1}} + \ldots\right);$$

le premier membre est continu par rapport à α, le second tend vers $n!\, s_{n+1}$; on a donc, pour $\alpha = 1$,

$$s_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{z^n dz}{e^z - 1}.$$

Or on a

$$B_{2n} = \frac{2 s_{2n}}{(2\pi)^{2n}} (2n)!;$$

on aura donc

$$B_{2n} = \frac{2}{(2\pi)^{2n}} (2n)! \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1} dz}{e^z - 1}$$

ou bien

$$B_{2n} = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1}\,dz}{e^z - 1}.$$

On trouverait, d'une manière analogue, la valeur de

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} + \ldots = \sigma_{n+1};$$

mais les σ se calculent facilement, au moyen des s, comme il suit : on a

$$\frac{1}{2^n} s_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \ldots,$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots;$$

donc

$$s_n - \frac{1}{2^n} s_n \quad \text{ou} \quad s_n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \sigma_n,$$

$$\sigma_n = \frac{2^n - 1}{2^n} s_n.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. On a, quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a_1} &+ \frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)} + \ldots \\ &+ \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)} \\ &+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}\,\frac{1}{z-x}.\end{aligned}$$

Dans bien des cas, $a_1, a_2, \ldots$ seront tels que le dernier terme tendra vers zéro ; alors $\frac{1}{z-x}$ sera développable en série convergente suivant les polynômes $x-a_1$, $(x-a_1)(x-a_2)$, ... ; en multipliant alors les deux membres par $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} f(z)$ et en intégrant le long d'un contour convenablement choisi, on obtient des développements divers en série de $f(x)$.

Si l'on prend $a_1 = x_0$, $a_2 = x_0 + h$, $a_3 = x_0 + 2h$, ..., on retrouve la formule

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{h} \dfrac{\Delta f(x_0)}{1} \\ \qquad + \dfrac{x - x_0}{h} \left(\dfrac{x - x_0}{h} - 1 \right) \dfrac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2} + \ldots, \end{cases}$$

avec une forme particulière du reste.

(Frobenius, *Journal de Crelle*, t. 73.)

M. Frobenius remarque que, si les séries $\sum a_n$ et $\sum c_n x^n$ sont convergentes, le module de x étant inférieur à R, la série

$$\sum c_n (x - a_1) \ldots (x - a_n)$$

l'est aussi dans un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon R.

2. Si, dans la formule (1), on égale les coefficients des mêmes puissances de x, après avoir développé les deux membres, on trouve

$$h^n f^n(x_0) = \text{A}\,\Delta^n f(x_0) + \text{B}\,\Delta^{n+1} f(x_0) + \text{C}\,\Delta^{n+2} f(x_0) + \ldots,$$

A, B, C, ... étant les coefficients des diverses puissances de ζ dans le développement de $\left[\dfrac{l(1+\zeta)}{\zeta}\right]^n$. Malheureusement, les conditions de convergence sont compliquées. (*Voir* l'exercice 4.)

3. En appelant i_m la somme des produits des i premiers nombres 1, 2, ..., i pris m à m, on a

$$\frac{1}{i!} \left[\frac{\log(1+x)}{x} \right]^i = \frac{1}{i!} - \frac{i_1 x}{(i+1)!} + \frac{i_2 x^2}{(i+2)!} - \ldots,$$

On trouve cette formule, en développant $(1 + x)^m$ de deux manières suivant les puissances de m et en identifiant les résultats.

4. On a

$$\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} \right)^n = 1 - \frac{n}{1} x + \frac{n(n+3)}{1.2} x^2 - \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

5. On a

$$\log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = x \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)} \frac{(-1)^n}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

(Lagrange.)

6. On a

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m = (2x)^m - m(2x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2x)^{m-4} - \dots$$

Voir l'exercice 4.

7. On a

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{x^2}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\,\frac{x^3}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\,\frac{x^4}{(1+x)^2} + \dots$$

(Euler, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, 1811;
Catalan, *Journal de Liouville*, t. IX).

Cette formule suppose x compris entre $2(1-\sqrt{2})$ et $2(1+\sqrt{2})$. En l'intégrant pour $n=-1$, on a un développement singulier de $\log(1+x)$.

8. On a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+h} + \frac{1.h}{(z+h)(z+2h)} + \frac{1.2.h^2}{(z+h)(z+2h)(z+3h)} + \dots$$

Que devient cette formule quand on la multiplie par $\dfrac{f(z)\,dz}{2\pi\sqrt{-1}}$ et quand on l'intègre?

9. On a

$$\log\frac{(1+x)(1+y)}{xy-x-y} = 1 + \sum \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\,x^m y^n.$$

(Tiré du *Cours d'Analyse* de M. Hermite.)

10. $F(x)$ désignant l'une des fonctions suivantes et a, b, c, ... ses zéros, on a

$$F(x) = A\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\cdots$$

et pour

$$F(x) = \cos x - \cos a, \qquad A = 1-\cos a,$$

$$F(x) = \sin x - \sin a, \qquad A = -\sin a,$$

$$F(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x\cos a + 1}{2e^x}, \qquad A = 1-\cos a.$$

(Euler, *Introductio in Analysin.*)

11. On a

$$\sum \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{m^n - 1} = 1,$$

m désignant un nombre qui n'est pas une puissance.

(GOLDBACH.)

12. On a, en appelant $a, b, c, \ldots$ les nombres premiers successifs

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{a^i}\right)\left(1 - \frac{1}{b^i}\right)\left(1 - \frac{1}{c^i}\right)\cdots} = \frac{1}{1^i} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \ldots.$$

En conclure qu'il y a une infinité de nombres premiers.

13. On a, en appelant $a, b, c, \ldots$ les nombres premiers impairs successifs,

$$\frac{1}{\left(1 \mp \frac{1}{a^i}\right)\left(1 \mp \frac{1}{b^i}\right)\cdots} = \frac{1}{1^i} - \frac{1}{3^i} + \frac{1}{5^i} - \ldots,$$

le signe + étant mis devant les fractions $\frac{1}{a^i}, \frac{1}{b^i}, \ldots$ qui correspondent aux nombres $a, b, \ldots$ de la forme $4n - 1$ et le signe — devant les autres.

14. On a

$$\frac{1}{(1-x)(1-ax)(1-a^2x)\ldots} = 1 + \frac{x}{1-a} + \frac{x^2}{(1-a)(1-a^2)} + \frac{x^3}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \ldots$$

(HEINE, *Journal de Crelle*, t. 39).

15. On a

$$1 - \frac{x}{x_1} + \frac{x(x-x_1)}{x_1 x_2} - \ldots \pm \frac{x(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{x_1 x_2 \ldots x_n}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

CHAPITRE VIII.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS MONOGÈNES ET MONODROMES.

---

§ I. — Préliminaires.

Nous allons montrer comment la théorie de Cauchy, sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, s'applique à l'étude des fonctions monogènes, c'est-à-dire des fonctions de $x+y\sqrt{-1}$ de la forme $X+Y\sqrt{-1}$, telles que

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}=0.$$

Ces fonctions sont celles que l'on rencontre le plus souvent en Analyse, et, comme l'on en considère rarement d'autres, il en résulte que l'on est tenté de les regarder comme les plus générales et que leurs propriétés curieuses ont lieu de surprendre au premier abord; mais cette surprise disparaîtra, si l'on réfléchit que les fonctions monogènes sont en réalité des fonctions de deux variables satisfaisant à deux équations.

§ II. — Sur une formule fondamentale.

Théorème. — *Soient*

$f(z)$ *une fonction qui reste finie et continue le long d'une courbe* z_0Z *de longueur finie;*

λ *une quantité dont le module est au plus égal à un;*

ζ *une valeur de* z *située sur la courbe* $z_0 Z$ *entre le point* z_0 *et le point* Z;

S *la longueur de l'arc* $z_0 Z$,

on aura

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \lambda S f(\zeta). \tag{1}$$

En effet, l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

peut se ramener à une intégrale prise entre des limites réelles; en posant $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, s désignant l'arc du contour compté à partir du point z_0, on a alors

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{0}^{S} f(z)\left(\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\sqrt{-1}\right)ds.$$

Le module de $\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\sqrt{-1}$ est un; en observant alors que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties, on trouve

$$\operatorname{mod} \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz < \int_{0}^{S} \operatorname{mod} f(z)\,ds; \tag{2}$$

$\operatorname{mod} f(z)$ est une certaine fonction de s, $\theta(s)$; or on sait que

$$\int_{0}^{S} \theta(s)\,ds = S\,\theta(\sigma),$$

σ étant une valeur de s comprise entre o et S; on aura donc, au lieu de (2),

$$\operatorname{mod} \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz < S \operatorname{mod} f(\zeta),$$

ζ désignant la valeur de z correspondante à la valeur σ de s. On peut écrire cette formule

$$\operatorname{mod} \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \varepsilon S \operatorname{mod} f(\zeta),$$

ε étant compris entre o et 1. Soient alors φ l'argument de $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$, et α l'argument de $f(\zeta)$, on aura

$$\operatorname{mod} f(\zeta) = e^{-\alpha\sqrt{-1}} f(\zeta)$$

et, en multipliant par $e^{\varphi\sqrt{-1}}$,

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \varepsilon e^{(\varphi-\alpha)\sqrt{-1}} \mathrm{S} f(z);$$

or $\varepsilon e^{(\varphi-\alpha)\sqrt{-1}}$ est une quantité λ dont le module est compris entre o et 1 ; on a donc

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \lambda \mathrm{S} f(\zeta).$$

C. Q. F. D.

III. — Formule de Taylor.

Supposons qu'une fonction $f(x)$ reste synectique à l'intérieur d'un contour fermé simple C, de longueur s et sur ce contour ; on a vu que l'on avait pour tout point x intérieur à ce contour

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour C, en différentiant par rapport à x ; on a d'ailleurs

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{f'(x)}{1} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz, \\ \frac{f''(x)}{1.2} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{(z-x)^3}\,dz, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned} \right.$$

or on a l'identité

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-x} &= \frac{1}{(z-a)-(x-a)} \\ &= \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots \\ &\quad + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} \frac{1}{z-x}. \end{aligned}$$

Multiplions (1) par $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} f(z)\,dz$ et intégrons le long du contour C; nous aurons

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\,dz}{z} + \ldots + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\,dz\,(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

ou, en vertu de (2) et en supposant le point a dans l'aire C,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n} f^n(a) + \mathrm{R};$$

ce qui est la formule de Taylor. Le reste R est donné par la formule

(3) $$\mathrm{R} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\mathrm{R} = \frac{\lambda s}{2\pi}\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^{n+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-x},$$

λ étant de module moindre que un, s désignant la longueur de contour C et ζ une valeur de z située sur le contour. De (3) on tire

$$-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(n+1)\int \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} = \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}(a);$$

donc

$$\mathrm{R} = \int_a^x \frac{(x-a)^n f^{n+1}(a)\,da}{1.2.3\ldots n}.$$

Si a est réel, cette valeur de R se met facilement sous la forme

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}\big[a + \theta(x-a)\big].$$

IV. — Quelques définitions, classification des singularités.

Dans ce qui va suivre, tous les points situés à l'infini seront censés condensés en un seul, et l'on dira qu'une fonction $f(z)$

a une valeur bien déterminée l au point situé à l'infini, si $f(z)$ tend vers la même limite l de quelque manière que l'on fasse croître le module de z pour le rendre infini.

Nous parlerons quelquefois d'un contour fermé infiniment petit entourant le point à l'infini ; il faudra entendre par là un contour fermé situé à une distance infinie de l'origine. C'est un contour qui se transformerait en contour infiniment petit contenant l'origine, si, dans son équation polaire, on remplaçait le rayon vecteur r par $\frac{1}{r}$.

Une fonction sera monodrome au point situé à l'infini, si elle est monodrome à l'extérieur d'un contour fermé ayant ses limites à l'infini, ou bien, ce qui est la même chose, $f(z)$ sera monodrome dans le voisinage du point à l'infini, si $f\left(\frac{1}{z}\right)$ est monodrome dans un contour fermé suffisamment petit contenant l'origine.

Quelques géomètres que ces locutions ont choqués, mais que n'ont pas choqués les locutions de *droite de l'infini, points ombilicaux,* etc., ont donné des imaginaires la représentation suivante :

Représentant d'abord l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$, comme

Fig. 22.

Cauchy, à l'aide d'un point M de coordonnées x, y sur un plan xOy, on considère une sphère S tangente en O à ce plan : soit O′ le pôle opposé à O, la droite O′M rencontre la sphère en M′, et c'est alors le point M′ qui représente définitivement l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$.

Dans ce mode de représentation, l'infini est effectivement représenté par un point unique O'. Ce mode de représentation est dû à M. Neumann.

On appelle *point singulier* ou *point critique* d'une fonction un point où elle cesse d'être soit finie, soit continue, soit bien déterminée, soit monodrome, soit monogène. Les points critiques ont été classés comme il suit :

1° Les *infinis* ou *pôles* sont des points où la fonction devient infinie, de telle sorte que son inverse soit nulle, bien déterminée et continue en ces points.

2° Les points *essentiels*, où la fonction devient indéterminée, ou discontinue.

o est un point essentiel pour la fonction $e^{\frac{1}{x}}$.

3° Les points de *ramification*, que nous étudierons plus tard, où la fonction cesse d'être monodrome.

Nous dirons qu'un point est un *zéro* ou *racine* de $f(x)$, si, en ce point, $f(x)$ s'annule sans devenir indéterminée; ainsi un zéro ne sera jamais un point essentiel.

V. — Théorèmes de Cauchy sur les fonctions.

Théorème I. — *Si une fonction est synectique à l'intérieur d'un contour fermé simple, toutes ses dérivées sont synectiques à l'intérieur du même contour.*

En effet, soit $f(z)$ une fonction synectique à l'intérieur d'un contour fermé C : on aura

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour intérieur à C et aussi voisin que l'on voudra du contour C; on en tire

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2};$$

le second membre de cette formule est évidemment synec-

tique; il en sera de même de $f'(x)$, par suite de $f''(x)$, $f'''(x)$, ... C. Q. F. D.

Théorème II. — *Une fonction monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan devient nécessairement infinie pour une valeur finie ou infinie de sa variable.*

En effet, la formule

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz,$$

en prenant un contour d'intégration circulaire de rayon R décrit du point x comme centre, c'est-à-dire en posant

$$z = x + \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad dz = \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\sqrt{-1},$$

devient

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})}{\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}}\,d\theta$$

ou

$$2\pi\mathrm{R}f'(x) = \int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})\,e^{-\theta\sqrt{-1}}\,d\theta.$$

Soit M le module maximum de $f(\mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}})$; le module d'une somme étant moindre que la somme des modules de ses parties, on a

$$\operatorname{mod} 2\pi\mathrm{R}f'(x) \leqq \int_0^{2\pi}\mathrm{M}\,d\theta \quad \text{ou} \quad \leqq \mathrm{M}\int_0^{2\pi} d\theta \quad \text{ou} \quad \leqq 2\pi\mathrm{M};$$

on en conclut

$$\mathrm{M} \geqq \mathrm{R}\operatorname{mod} f'(x).$$

Or on peut toujours supposer $f'(x)$ différent de zéro, sans quoi $f'(x)$ serait constamment nul et $f(x)$ serait constant. Or, R pouvant être pris aussi grand que l'on veut, il en résulte que M pourra aussi être pris aussi grand que l'on veut. Si donc M ou $f(x)$ n'est pas infini pour une valeur finie de x, il le deviendra pour une valeur infinie de sa variable.

Théorème III. — *Une fonction monodrome et monogène*

dans toute l'étendue du plan devient nécessairement nulle et infinie, pour des valeurs finies ou infinies de sa variable.

En effet, elle devient nécessairement infinie et la considération de son inverse prouve qu'elle doit nécessairement devenir nulle, puisque cette fonction inverse doit devenir infinie; mais le zéro ou l'infini peut coïncider avec un point essentiel situé à l'infini.

Nous dirons que a est un *zéro de $f(z)$ d'un ordre de multiplicité* α si l'on peut mettre $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \varphi(z)(z-a)^{\alpha},$$

$\varphi(z)$ n'étant plus ni nul ni infini pour $z=a$; a sera *un infini d'un ordre de multiplicité* α si $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^{\alpha}},$$

$\varphi(z)$ n'étant plus ni nul ni infini pour $z=a$.

Théorème IV. — *Toutes les dérivées d'une fonction synectique à l'intérieur d'une aire* C *ne sauraient s'annuler en même temps que cette fonction en un point situé à l'intérieur de cette aire.*

En effet, soit $f(x)$ la fonction en question : supposons qu'elle s'annule pour $x=a$, ainsi que ses dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ... ; soit x un point intérieur au cercle de rayon R décrit du point a comme centre ; supposons R assez petit pour que le cercle en question ne sorte pas de l'aire C, $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ... étant nuls, la formule de Taylor donnera (p. 333)

$$f(x) = \frac{\lambda S}{2\pi}\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x};$$

S désignant le contour $2\pi R$ du cercle, et ζ une valeur de z située sur ce cercle, λ a un module compris entre 0 et 1. On peut aussi écrire

$$f(x) = \lambda R\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x};$$

le module R de $\zeta - a$ étant plus grand que celui de $x - a$, on pourra toujours prendre n assez grand pour que $\left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^{n+1}$ ait un module aussi petit que l'on voudra : donc $f(x) = 0$. La fonction $f(z)$ est donc nulle à l'intérieur du cercle de rayon R ayant son centre en a.

Je dis qu'elle est nulle dans toute l'étendue de l'aire C. En effet, supposons qu'elle ne soit nulle que dans une portion limitée de cette aire que nous appellerons D, et que dans des portions de C voisines de D elle puisse prendre des valeurs différentes de o. Soit b un point voisin de la portion D, tel que $f(b) \gtrless 0$, on peut toujours supposer que, dans l'aire D, on trouve un point a assez voisin de b pour qu'un cercle, ayant son centre en a et un rayon un peu supérieur à la distance ab, ne sorte pas de l'aire C. Au centre de ce cercle, $f(z)$ et ses dérivées sont nulles ; donc $f(z)$ est nulle à l'intérieur du cercle en question : donc $f(b) = 0$. C. Q. F. D.

Théorème V. — *Une fonction synectique à l'intérieur d'une aire* C *limitée par un contour fermé simple ne saurait être constante dans une portion finie de cette aire, fût-ce même le long d'une courbe, sans être constante dans toute l'étendue de l'aire* C.

En effet, supposons que la fonction $f(z)$ puisse prendre la valeur constante k dans une portion finie de l'aire, $f(z) - k$ serait nulle, ainsi que toutes ses dérivées, dans la portion où $f(z)$ reste constante, et par suite en un point de l'aire C ; elle serait donc nulle dans toute l'étendue de l'aire, et $f(z)$ serait constante aussi dans toute l'étendue de l'aire C.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Deux fonctions synectiques dans une aire* C, *égales dans une portion finie de cette aire, sont égales dans toute l'étendue de l'aire.*

Car leur différence, étant nulle dans une portion finie de l'aire, est nulle dans toute l'étendue de l'aire.

Théorème VI. — *Si la fonction $f(x)$, synectique à l'intérieur de l'aire* C, *s'annule pour $x = a$, le point a appartenant à l'aire* C, *cette fonction est de la forme*

$$(x-a)^m \varphi(x),$$

m désignant un nombre entier, positif, fini, et $\varphi(x)$ une fonction qui n'est ni nulle ni infinie pour $x = a$.

En effet, on a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} f^{m-1}(a) \\ + \frac{(x-a)^m}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^m(z-x)},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé décrit autour du point a et intérieur à l'aire C. Mais, $f(a)$ étant nul, toutes les dérivées de $f(x)$ ne peuvent pas être nulles pour $x = a$; soit donc $f^m(a)$ la première dérivée de $f(x)$ différente de o pour $x = a$, la formule précédente deviendra

$$f(x) = \frac{(x-a)^m}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^m(z-x)};$$

le coefficient de $(x-a)^m$ se réduit pour $x = a$ à $\frac{f^m(a)}{1.2.3\ldots m}$; il n'est par conséquent pas nul, et $f(x)$ est bien de la forme annoncée.

Corollaire. — *Si une fonction $f(x)$, synectique à l'intérieur de l'aire* C, *s'annule pour $x = a$, $x = b$, $x = c$, les points a, b, c étant situés dans l'aire* C, *$f(x)$ sera de la forme*

$$f(x) = \varphi(x)(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ n'étant ni nul ni infini pour $x = a$, $x = b$, $x = c$.

En effet, $f(x)$ est de la forme $(x-a)^m\varphi(x)$ d'après le théorème précédent, m étant un entier et $\varphi(x)$ une fonction

synectique qui n'est ni nulle ni infinie pour $x = a$, mais qui s'annule pour $x = b$, $x = c$; $\varphi(x)$ est donc de la forme $(x - b)^n \psi(x)$, et, par suite, $f(x)$ est de la forme

$$(x - a)^m (x - b)^n \psi(x),$$

$\psi(x)$ n'étant ni nul ni infini pour $x = a$, $x = b$, etc.

Théorème VII. — *La fonction $f(x)$ synectique dans l'aire C a nécessairement un nombre limité de racines dans cette aire, si cette aire est elle-même finie.*

En effet, $f(x)$ s'annulant pour $x = a$ dans l'aire C, nous venons de voir que

$$f(x) = (x - a)^m \varphi(x).$$

$\varphi(x)$ n'étant ni nul ni infini pour $x = a$, et m désignant un entier, cette fonction $\varphi(x)$ est évidemment continue et, par suite, elle ne saurait s'annuler pour une valeur de x infiniment voisine de a; $f(x)$ ne saurait donc s'annuler non plus pour une valeur infiniment voisine de a; les zéros de $f(x)$ dans l'aire C sont donc séparés par des intervalles de grandeur finie et $f(x)$ ne saurait avoir une infinité de zéros dans une aire finie.

Théorème VIII. — *Une fonction monodrome, monogène et bien déterminée dans l'intérieur d'une aire finie C ne saurait avoir une infinité de zéros ou d'infinis dans cette aire.*

Nous venons de voir qu'elle ne pouvait pas avoir une infinité de zéros sans infinis.

Elle ne peut avoir un nombre infini de zéros et un nombre limité d'infinis; en effet, elle ne peut avoir un nombre infini de zéros entre le contour C et des contours infinitésimaux entourant les infinis situés dans l'aire C. Donc, c'est autour des infinis que viendraient se grouper une infinité de zéros, infiniment rapprochés de ces infinis; ces infinis ne seraient pas

des infinis ordinaires ou pôles, ce seraient des points essentiels, puisque l'inverse de la fonction n'y serait pas continue.

Elle ne peut non plus avoir un nombre infini de zéros et un nombre infini d'infinis.

Enfin elle ne peut pas avoir un nombre infini d'infinis, sans quoi son inverse aurait un nombre infini de zéros.

Théorème IX. — *Si une fonction monodrome et monogène dans une aire contenant le point a, sans autre discontinuité que des infinis, devient infinie pour $x = a$, elle peut se mettre sous la forme $\frac{\psi(x)}{(x-a)^m}$, m désignant un nombre entier et $\psi(x)$ une fonction qui n'est ni nulle ni infinie pour $x = a$.*

En effet, l'inverse de $f(x)$ s'annule pour $x = a$; dans le voisinage du point a, elle n'a pas d'infinis, sans quoi a serait un point essentiel de $f(x)$; donc l'inverse de $f(x)$ est de la forme $(x-a)^m\varphi(x)$ ou $\frac{(x-a)^m}{\psi(x)}$, $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ n'étant ni nuls ni infinis pour $x = a$, et, par suite, $f(x)$ lui-même peut se mettre sous la forme $\frac{\psi(x)}{(x-a)^m}$.

Corollaire. — Si la fonction $f(x)$ monodrome et monogène (sans points essentiels) dans l'aire C admet les zéros a, b, c, ... et les infinis α, β, γ, ... situés dans cette aire, elle peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \frac{(x-a)^m(x-b)^n\ldots}{(x-\alpha)^\mu(x-\beta)^\nu\ldots}\,\psi(x).$$

$\psi(x)$ ne devenant plus ni nul ni infini aux points a, b, c, ... α, β, γ, ...

Les fonctions dénuées de points essentiels, et possédant par conséquent un nombre limité de zéros et d'infinis dans une aire C, ont quelquefois été appelées *méromorphes* (Briot et Bouquet).

VI. — Théorèmes de Cauchy sur les zéros et les infinis d'une fonction, contenus dans l'intérieur d'un contour fermé.

Théorème. — *Soit $f(z)$ une fonction monodrome et monogène, sans points essentiels à l'intérieur d'un contour fermé simple* C, *possédant à l'intérieur de ce contour les zéros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ avec les degrés de multiplicité respectifs $m_1, m_2, m_3, \ldots$ et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ avec les degrés de multiplicité respectifs $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$; soit $F(z)$ une fonction synectique à l'intérieur du contour* C, *on aura*

$$\begin{aligned} & m_1 F(a_1) + m_2 F(a_2) + \ldots - \mu_1 F(\alpha_1) - \mu_2 F(\alpha_2) - \ldots \\ & = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int F(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz, \end{aligned}$$

l'intégrale étant prise le long du contour C *ou, plus exactement, le long d'un contour infiniment peu différent de* C *et intérieur à* C.

En effet, on a

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots}\,\theta(z),$$

$\theta(z)$ n'étant ni nul ni infini pour $z = a_1, a_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de cette formule : nous aurons

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{m_i}{z-a_i} - \sum \frac{\mu_j}{z-\alpha_j} + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)};$$

multiplions les deux membres de cette formule par

$$F(z)\frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}}$$

et intégrons le long du contour C, en observant que (p. 245) l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z-a} F(z)$$

prise le long d'un contour fermé contenant le point a est

égale à $2\pi\sqrt{-1}\,F(a)$ et que $\theta'(z)$ est fini en vertu du théorème I, nous trouverons

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum m_i F(a_i) - \sum \mu_j F(\alpha_j);$$

c'est la formule que nous voulions établir.

Corollaire I. — Si le contour C contenait un seul zéro et pas d'infini de $f(z)$, on aurait

$$F(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

et, en particulier,

$$a = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{z f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

ce qui permet de remplacer le calcul d'une racine par le calcul d'une intégrale définie, quand cette racine a été séparée.

Corollaire II. — Supposons que, dans la formule (1), on fasse $F(z) = 1$, elle deviendra

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \sum m_i - \sum n_j,$$

ce qui signifie que :

Le nombre des zéros, diminué du nombre des infinis d'une fonction monodrome et monogène, sans points essentiels à l'intérieur du contour C, *est égal à l'intégrale*

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

prise le long de ce contour, pourvu qu'un zéro ou un infini d'un ordre de multiplicité k soit compté pour k zéros ou k infinis.

Or on peut évaluer l'intégrale (2) comme il suit : l'intégrale indéfinie est $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f(z)$; pour obtenir l'intégrale

définie (2), il faut remplacer z par sa valeur initiale quand on lui fait décrire le contour d'intégration, puis par sa valeur finale et faire la différence des résultats ; bien que la valeur finale et la valeur initiale de z soient les mêmes, les valeurs correspondantes de $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f(z)$ ne sont pas les mêmes ; on a, en effet (p. 228 et suiv.),

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\log \operatorname{mod} f(z) + \sqrt{-1}\arg f(z)].$$

$\log \operatorname{mod} f(z)$ reprend sa valeur initiale quand le point z a achevé sa révolution sur le contour d'intégration, mais $\arg f(z)$ s'est en général modifié, en sorte que l'intégrale (2) est égale à la variation subie par l'argument de $f(z)$ divisé par 2π ; donc :

Corollaire III. — *Le nombre des zéros de $f(z)$ contenus dans le contour* C, *diminué du nombre de ses infinis, est égal à la variation que subit l'argument de cette fonction, quand sa variable parcourt le contour* C *tout entier, divisée par* 2π.

La fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme $X + Y\sqrt{-1}$ et son argument est une des valeurs de $\operatorname{arc tang}\frac{Y}{X}$. La variation de cet argument est un multiple de 2π, que l'on évaluera comme il suit : faisant cheminer le point z le long de C, $\frac{Y}{X}$ deviendra plusieurs fois infini (sans quoi $\operatorname{arc tang}\frac{Y}{X}$, ne franchissant pas de multiple de $\frac{\pi}{2}$, ne pourrait varier de 2π). Soient N le nombre de fois qu'il devient infini en passant du négatif au positif, n le nombre de fois qu'il devient infini en passant du positif au négatif, la variation de l'argument de $f(z)$ ou de $\operatorname{arc tang}\frac{Y}{X}$ sera évidemment égale à $\frac{N-n}{2}\pi$; quand, par exemple, $\operatorname{arc tang}\frac{Y}{X}$ a franchi deux fois un mul-

tiple de $\frac{\pi}{2}$ en passant du négatif au positif, il a cru de π; donc :

Corollaire IV. — *Le nombre des zéros de $f(z)$ contenus dans le contour C, diminué du nombre des infinis contenus dans le même contour, est égal au nombre $\frac{N-n}{2}$, N désignant le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ passe du négatif au positif en devenant infini, et n le nombre de fois qu'il passe du positif au négatif en devenant infini.*

Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations du contour C; la fonction $\frac{Y}{X}$ le long de C pourra être considérée comme une fonction de t. Soient t_0 et T les valeurs initiale et finale de t quand le point z décrit le contour C en entier; d'après ce que l'on a vu (p. 111), on aura

$$N - n = \int_{t_0}^{T} \frac{Y}{X}.$$

Lorsque la fonction $f(z)$ est entière, Y et X sont des polynômes entiers de x et y; le contour C, quel qu'il soit, ne contient pas d'infinis, et l'on a

$$N = \int_{t_0}^{T} \frac{Y}{X};$$

or on a vu (p. 114) comment, par des divisions successives, on peut calculer le nombre $\int_{t_0}^{T} \frac{Y}{X}$ quand X et Y sont entiers en t.

Pour faire une dernière application de la formule (1), si riche en conséquences, supposons que la fonction f soit transcendante et qu'elle ait une infinité de zéros; si l'on fait grandir indéfiniment le contour C, le second nombre se transformera en une série, dont le premier nombre donnera la valeur sous forme d'intégrale définie. Mais il y a ici une pré-

caution indispensable à prendre : il faut écrire les termes de la série dans un ordre bien déterminé, qui est celui dans lequel ils s'ajoutent à mesure que l'on fait croître indéfiniment le contour d'intégration ; car l'intégrale qui figure dans le premier membre de (1) peut changer de valeur suivant la manière dont on déforme le contour d'intégration en le faisant grandir.

Prenons, par exemple, pour contour d'intégration un cercle de rayon infini décrit de l'origine comme centre ; soit

$$f(z) = e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1, \qquad F(z) = e^{-2\pi z\sqrt{-1}}\varphi(z),$$

nous aurons

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} \int \frac{\varphi(z)\,dz}{e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1} = \varphi(0) &+ [\varphi(1) + \varphi(-1)] + \ldots \\ &+ [\varphi(n) + \varphi(-n)] + \ldots ; \end{aligned}\right.$$

si $\varphi(z)$ devenait infini, il est clair qu'il faudrait ajouter au second membre le résidu de $\frac{\varphi(z)}{e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1}$ relatif aux infinis de $\varphi(z)$.

Posons, par exemple, $\varphi(z) = \frac{1}{z^{2i}}$, i désignant un entier, l'intégrale du premier membre sera nulle et le résidu de $\frac{1}{z^{2i}(e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1)}$ sera $\frac{1}{1.2.3\ldots 2i}\frac{d^{2i}}{dz^{2i}}\frac{z}{e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1}$ pour $z = 0$; on aura donc, au lieu de la formule (A),

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2i}\left[\frac{d^{2i}}{dz^{2i}}\frac{z}{1 - e^{2\pi z\sqrt{-1}}}\right]_{z=0} = \frac{2}{1^{2i}} + \frac{2}{2^{2i}} + \ldots + \frac{2}{n^{2i}} + \ldots ;$$

pour $i = 1$, on trouve

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

VII. — Application des principes précédents.

Nous allons appliquer le théorème de Cauchy, démontré au paragraphe précédent, au développement des racines de

certaines équations; mais nous allons nous en servir d'abord pour établir quelques théorèmes sur les fonctions implicites.

Théorème I. — *Toute fonction y de x définie par une équation*

$$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle $f(x, y)$ désigne une fonction de x et de y, monodrome et monogène par rapport à y et à x dans toute l'étendue du plan, reste continue, monodrome et monogène à l'intérieur de tout contour fermé C simple qui ne contient pas de point x, pour lequel y devient infini, ou pour lequel l'équation $f(x, y) = 0$ a une racine multiple.

Le théorème serait encore vrai si, x variant à l'intérieur du contour C, y variait à l'intérieur d'un contour fermé simple C' et si la fonction $f(x, y)$ restait monodrome, monogène, finie et continue pour tous les points x intérieurs au contour C, et pour les points y intérieurs au contour C'.

Pour démontrer ce théorème, considérons un contour fermé simple C' qui ne contienne qu'une racine y de l'équation (1) : cette racine sera donnée par la formule (p. 343)

$$(2) \qquad y = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int z \frac{f_2(x, z)\,dz}{f(x, z)},$$

f_1 et f_2 désignant pour abréger $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, pourvu que f ne devienne pas infini dans le contour C' quand on fait varier x. Il est clair que, dans ces conditions, l'intégrale qui figure dans la formule (2) est une fonction finie, continue, monodrome et monogène de x; il en est de même de y.

Théorème II. — *Les points x où l'équation* (1) *acquiert des racines multiples peuvent être des points critiques de la fonction y.*

Cela résultera d'une analyse que nous développerons un peu plus loin; pour le moment, il faut observer que le rai-

sonnement que nous avons fait tout à l'heure ne s'applique plus à une racine multiple, que, d'ailleurs, si l'on différentie la formule (1), on a

$$f_1 + f_2 \frac{dy}{dx} = 0,$$

et que $\frac{dy}{dx}$ croît ordinairement jusqu'à l'infini quand f_2 tend vers zéro, c'est-à-dire quand y devient racine multiple de (1).

VIII. — Série de Burmann.

Supposons que la fonction $\theta(z)$ soit synectique à l'intérieur d'un contour fermé C et qu'elle n'ait qu'une racine à l'intérieur de ce contour; si le nombre x n'est pas très différent de cette racine, en d'autres termes, si $\theta(x)$ n'a pas un module très grand, on pourra supposer que, le long du contour C,

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{mod}\theta(z) > \operatorname{mod}\theta(x).$$

Supposons donc : 1° qu'à l'intérieur du contour C, $\theta(x)$ soit synectique; 2° qu'elle n'ait qu'un seul zéro; 3° enfin que, x étant intérieur au contour C, on ait toujours pour les points z situés sur ce contour l'inégalité (1). Je dis que, si $f(z)$ est une fonction synectique à l'intérieur du contour C, on pourra le développer suivant les puissances ascendantes de $\theta(x)$.

En effet, appelons N le nombre des racines de

$$\theta(z) - \theta(x) = 0,$$

dont l'une est x, contenues dans le contour C; on aura

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z) - \theta(x)}.$$

En vertu de (1), on pourra développer le second membre de cette formule suivant les puissances de $\theta(x)$, et l'on aura

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[\int \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \int \frac{\theta'(z)\theta(x)\,dz}{\theta^2(z)} + \ldots \right].$$

Tous les termes du second membre sont nuls, ainsi que le montre l'intégration immédiate, sauf le premier qui est égal au nombre des racines de $\theta(z)=0$ contenues dans C, c'est-à-dire à un, donc $N=1$; on aura donc, en intégrant toujours le long du même contour C,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}. \tag{2}$$

Si, à l'intérieur du contour C, l'équation $\theta(z)=0$ avait α racines, l'équation $\theta(z)-\theta(x)=0$ en aurait α aussi, toujours sous la condition (1), et, en appelant $x, x', x'', \ldots$ ces racines, la formule (2) devrait être modifiée : son premier membre devrait être remplacé par $f(x)+f(x')+f(x'')+\ldots$.

Ceci posé, puisque l'on suppose que, le long du contour C, le module de $\theta(x)$ reste inférieur à celui de $\theta(z)$, l'intégrale qui entre dans la formule (2) pourra se développer suivant les puissances ascendantes de la fonction $\theta(x)$, et l'on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Bigg[\int\frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta(z)}+\theta(x)\int\frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta^2(z)}+\ldots\\ +\theta^n(x)\int\frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)}+\ldots\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Or, en général, on a, en intégrant par parties,

$$\int\frac{f(z)\theta'(z)}{\theta^{n+1}(z)}\,dz=-\frac{f(z)}{n\theta^n(z)}+\int\frac{f'(z)\,dz}{n\theta^n(z)};$$

si l'on pose alors

$$\theta(z)=(z-a)\Theta(z)$$

et si l'on intègre le long du contour C, il vient

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)}=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right];$$

on a donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} f(x)=f(a)+\theta(x)\frac{f'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\theta^2(x)}{1.2}\,\frac{d}{da}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^2(a)}\right]+\ldots\\ +\frac{\theta^n(x)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

C'est la formule de Burmann; on peut lui donner une autre forme : nous poserons

$$\mathrm{P}\mathrm{F}(z) = \frac{1}{\theta'(z)}\frac{d\mathrm{F}}{dz};$$

alors on a, comme plus haut,

$$\int \frac{f(z)\theta'(z)}{\theta^{n+1}(z)}\,dx = -\frac{1}{n}\frac{1}{\theta^n(z)}f(z) + \frac{1}{n}\int \frac{f'(z)\theta'(z)\,dz}{\theta'(z)\theta^n(z)}$$

ou, en observant que, si l'on intègre le long du contour C, la quantité hors des signes $\int$ s'annule,

$$\int \frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{n}\int \frac{\theta'(z)}{\theta^n(z)}\,\mathrm{P}f(z)\,dz.$$

Une seconde intégration par parties donne

$$\int \frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{n(n-1)}\int \frac{\theta'(z)}{\theta^{n-1}(z)}\,\mathrm{P}^2f(z)\,dz,$$

et ainsi de suite, et finalement

$$\int \frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,\mathrm{P}^nf(z)\,dz;$$

par suite

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\mathrm{P}^nf(a).$$

La formule (3) devient alors

$$f(x) = f(a) + \frac{\theta(x)}{1}\frac{f'(a)}{\theta'(a)} + \frac{\theta^2(x)}{1.2}\,\mathrm{P}^2f(a) + \ldots + \frac{\theta^n(x)}{1.2.3\ldots n}\,\mathrm{P}^nf(a) + \ldots.$$

La comparaison de cette formule avec la formule (4) fournit l'identité

$$\mathrm{P}^nf(a) = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right].$$

L'application de la formule de Burmann au développement de e^{ax} suivant les puissances de xe^{bx} donne

$$e^{ax} = 1 + axe^{bx} + a(a-2b)\frac{x^2}{1.2}e^{2bx} + a(a-3b)\frac{x^3}{1.2.3}e^{3bx} + \ldots.$$

Le reste R de la formule de Burmann, quand le dernier terme employé est en $\theta^n(x)$, est donné par la formule

$$R = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\theta'(z)}{\theta(z)-\theta(x)}\frac{\theta^{n+1}(x)}{\theta^{n+1}(z)}dz,$$

de sorte que, si M désigne la valeur maxima du module de

$$\frac{f(z)\theta'(z)}{[\theta(z)-\theta(x)]\theta^{n+1}(z)}$$

le long d'un contour C contenant le point x, et tel que $\theta(z)$ ait un module supérieur à $\bmod\theta(x)$, on aura

$$\bmod R \leqq \bmod\theta^{n+1}(x)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int M\,dz$$

ou, en appelant s la longueur du contour C,

$$\bmod R \leqq \frac{sM}{2\pi}\bmod\theta^{n+1}(x).$$

Telle est l'expression de la limite supérieure du reste dans la formule de Burmann.

Nous allons maintenant transformer la formule de Burmann et donner une forme nouvelle à ses coefficients : nous aurons alors la série de Wronski.

IX. — Série de Wronski.

Supposons que l'on ait démontré la possibilité du développement

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_n\omega_n + \ldots,$$

a_0, a_1, a_2, ... désignant des constantes et ω_1, ω_2, ...,

$\omega_n, \ldots,$ des fonctions données de x; supposons enfin qu'il soit permis de calculer les dérivées de $f(x)$ en prenant les dérivées de chaque terme du second membre de (1). Nous aurons

$$f'(x) = a_1\omega'_1 + a_2\omega'_2 + \ldots + a_n\omega'_n + \ldots,$$

et nous en conclurons

$$\frac{f'(x)}{\omega'_1} = a_1 + a_2\frac{\omega'_2}{\omega'_1} + \ldots + a_n\frac{\omega'_n}{\omega'_1} + \ldots;$$

si l'on différentie encore, on a

$$\frac{f''\omega'_1 - f'\omega''_1}{\omega'^2_1} = a_2\frac{\omega''_2\omega'_1 - \omega''_1\omega'_2}{\omega'^2_1} + \ldots,$$

ce que l'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} \omega'_1 & f' \\ \omega''_1 & f'' \end{vmatrix} = a_2\begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 \\ \omega''_1 & \omega''_2 \end{vmatrix} + \ldots + a_n\begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_n \\ \omega''_1 & \omega''_n \end{vmatrix} + \ldots,$$

et ce qui fait soupçonner la formule

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 & \ldots & \omega'_{n-1} & f' \\ \omega''_1 & \omega''_2 & \ldots & \omega''_{n-1} & f'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega^n_1 & \omega^n_2 & \ldots & \omega^n_{n-1} & f^n \end{vmatrix} = \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} a_\mu \begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 & \ldots & \omega'_{n-1} & \omega'_\mu \\ \omega''_1 & \omega''_2 & \ldots & \omega''_{n-1} & \omega''_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega^n_1 & \omega^n_2 & \ldots & \omega^n_{n-1} & \omega^n_\mu \end{vmatrix}.$$

Cette formule est vraie pour $n = 2$; admettons qu'elle ait lieu pour une certaine valeur de n, et démontrons qu'elle a lieu pour une valeur de n supérieure d'une unité.

Pour abréger, nous poserons

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 & \ldots & \omega'_{n-1} & F' \\ \omega''_1 & \omega''_2 & \ldots & \omega_{n-1} & F'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega^n_1 & \omega^n_2 & \ldots & \omega^n_{n-1} & F^n \end{vmatrix} = \Omega_n(F);$$

alors la formule (2) pourra s'écrire

$$\Omega_n(f) = \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} a_\mu \Omega_n(\omega_\mu)$$

et, en différentiant après avoir divisé par $\Omega_n(\omega_n)$,

$$(4)\qquad \frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(f)}{\Omega_n(\omega_n)} = \sum a_\mu \frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\omega_\mu)}{\Omega_n(\omega_n)}.$$

Or on a, en général,

$$(5)\qquad \frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{\Omega'_n(\mathrm{F})\Omega_n(\omega_n) - \Omega_n(\mathrm{F})\Omega'_n(\omega_n)}{\Omega_n^2(\omega_n)};$$

mais la dérivée relative à x d'un déterminant tel que (3) s'obtient en prenant les dérivées des éléments de la dernière ligne, comme il est facile de le voir, et l'on a, par suite,

$$\Omega'_n(\mathrm{F}) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^n}, \qquad \Omega_n(\omega_n) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\mathrm{F}^n},$$

$$\Omega_n(\mathrm{F}) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^{n-1}}, \qquad \Omega'_n(\omega_n) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\mathrm{F}^{n-1}};$$

(5) devient alors

$$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{1}{\Omega_n^2(\omega_n)}\left[\frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^n}\frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\mathrm{F}^n} - \frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^{n+1}}\frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\mathrm{F}^{n-1}}\right],$$

c'est-à-dire, en vertu d'un théorème connu sur les déterminants (t. I, p. 161),

$$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{1}{\Omega_n^2(\omega_n)}\frac{\partial^2\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^n\,\partial\mathrm{F}^{n+1}}\Omega_{n+1}(\mathrm{F});$$

mais

$$\frac{\partial^2\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^n\,\partial\mathrm{F}^{n+1}} = \Omega_n(\omega_n);$$

donc enfin

$$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)}.$$

En ayant égard à cette formule, (4) peut s'écrire

$$\Omega_{n+1}(f) = \sum_{\mu=n+1}^{\mu=\infty} a_\mu \Omega_{n+1}(\omega_\mu),$$

ce qui est la formule (2) dans laquelle on a changé n en $n+1$; cette formule (2) est donc exacte.

Reprenons maintenant cette formule (2) et écrivons-la ainsi

$$\frac{\Omega_n(f)}{\Omega_n(\omega_n)} = a_n + \sum_{\mu=n+1}^{\mu=\infty} a_\mu \frac{\Omega_n(\omega_\mu)}{\Omega_n(\omega_n)};$$

on aura

(6) $$a_n = \frac{\Omega_n(f)}{\Omega_n(\omega_n)} - \sum_{\mu=n+1}^{\mu=\infty} a_\mu \frac{\Omega_n(\omega_\mu)}{\Omega_n(\omega_n)}.$$

Telle est, d'après Wronski, l'expression de a_n dans la formule (1). Les applications qu'il propose de cette formule conduiraient, en général, à des résultats inexacts; mais on peut cependant s'en servir pour retrouver sous une forme curieuse la formule de Burmann : il suffit pour cela de supposer

$$\omega_1 = \theta(x), \qquad \omega_2 = \theta^2(x), \qquad \ldots, \qquad \omega_n = \theta^n(x), \qquad \ldots,$$

et $\theta(a) = 0$; alors, en faisant $x = a$, la formule (6) devient

$$a_n = \frac{\Omega_n(f)}{\Omega_n(\theta^n)}$$

ou bien

$$a_n = \frac{\sum \pm D\theta\, D^2\theta^2 \ldots D^{n-1}\theta^{n-1}\, D^n f}{\sum \pm D\theta\, D^2\theta^2 \ldots D^n\theta^n},$$

le signe D représentant $\frac{d}{da}$. Cette formule peut s'écrire

$$a_n = \frac{\sum \pm D\theta\, D^2\theta^2 \ldots D^{n-1}\theta^{n-1}\, D^n f}{1.2.3\ldots n[\theta'(a)]^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

θ et f étant écrits, pour abréger, à la place de $\theta(a)$ et de $f(a)$. La formule (1) devient alors

$$f(x) = f(a) + \theta(x)\frac{f'(a)}{1.\theta'(a)} + \ldots$$
$$+ \frac{\theta^n(x)}{1.2.3\ldots n} \frac{\sum \pm D\theta\, D^2\theta^2 \ldots D^{n-1}\theta^{n-1}\, D^n f}{[\theta'(a)]^{\frac{n(n+1)}{2}}} + \ldots.$$

C'est, sous une nouvelle forme, la série de Burmann, formule peu connue, probablement à cause de l'appareil prétentieux avec lequel elle a été présentée par Wronski dans sa *Philosophie de la Technie!*

X. — Série de Lagrange.

La série de Lagrange a pour but de faire connaître le développement en série d'une racine de l'équation

$$(1) \qquad z - x - tf(z) = 0,$$

ou même d'une fonction quelconque de cette racine.

Considérons un contour fermé simple C et supposons qu'à l'intérieur de ce contour $f(z)$ soit synectique; le nombre N des racines de (1) contenues dans le contour en question sera donné par la formule (p. 344)

$$(2) \qquad 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{N} = \int \frac{1 - tf'(z)}{z - x - tf(z)}\,dz,$$

où l'intégrale est prise le long du contour C. Supposons que, le long du contour C, on ait toujours

$$(3) \qquad \operatorname{mod}(z - x) > \operatorname{mod} tf(z),$$

ce qui aura lieu évidemment si t est assez petit, on pourra développer le second membre de (1) suivant les puissances de t et l'on aura

$$2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{N} = \int [1 - tf'(z)]\,dz \left[\frac{1}{z - x} + \frac{tf(z)}{(z - x)^2} + \ldots + \frac{t^n f^n(z)}{(z - x)^{n+1}} + \ldots\right]$$

ou

$$2\pi\mathrm{N}\sqrt{-1} = \int dz \left\{\frac{1}{z - x} + t\left[\frac{f(z)}{(z - x)^2} - \frac{f'(z)}{z - x}\right] + \ldots + t^n\left[\frac{f^n(z)}{(z - x)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z)f'(z)}{(z - x)^n}\right]\ldots\right\}.$$

Nous supposerons le point x à l'intérieur du contour C; alors, si l'on se rappelle que

$$(4)\qquad \int \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{(z-x)^n} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{1.2\ldots(n-1)}\,\mathrm{F}^{n-1}(x),$$

cette formule donnera, tous les termes en t se détruisant,

$$\mathrm{N}=1.$$

Ainsi le contour C, le long duquel la formule (3) a lieu, contient une et une seule racine de (1). Appelons α cette racine, et soit $\mathrm{F}(z)$ une fonction synectique dans le contour C; on aura (p. 344)

$$2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{F}(\alpha) = \int \frac{1-tf'(z)}{z-x-tf(z)}\,\mathrm{F}(z)\,dz,$$

l'intégrale étant toujours prise le long du contour C. Développant le second membre suivant les puissances de t, il vient

$$2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{F}(\alpha) = \int \mathrm{F}(z)[1-tf'(z)]\,dz\left\{\frac{1}{z-x}+\frac{tf(z)}{(z-x)^2}+\ldots\right\}$$

ou

$$\begin{aligned}2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{F}(\alpha) = \int \mathrm{F}(z)\,dz\Bigg\{\frac{1}{z-x} &+ t\left[\frac{f(z)}{(z-x)^2}-\frac{f'(z)}{z-x}\right]+\ldots\\ &+ t^n\left[\frac{f^n(z)}{(z-x)^{n+1}}-\frac{f^{n-1}(z)f'(z)}{(z-x)^n}\right]+\ldots\Bigg\},\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (4) que nous avons rappelée,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{F}(x) &+ t\left[\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x)f(x) - f'(x)\mathrm{F}(x)\right]+\ldots\\ &+ t^n\left[\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{F}(x)f^n(x)\right.\\ &\qquad \left.-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\mathrm{F}(x)f^{n-1}(x)f'(x)\right]+\ldots\end{aligned}$$

ou enfin, en réduisant en un seul les deux termes qui sont entre crochets,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{F}(x) &+ \frac{t}{1}\mathrm{F}'(x)f(x) + \frac{t^2}{1.2}\frac{d}{dx}[\mathrm{F}'(x)f^2(x)]+\ldots\\ &+ \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\mathrm{F}'(x)f^n(x)]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Telle est la formule de Lagrange. *Pour qu'elle soit applicable, il faut que la racine* α *soit contenue à l'intérieur d'un contour contenant le point* x *et le long duquel on ait*

$$\operatorname{mod}(z-x) > \operatorname{mod} t f(z).$$

En particulier, si $F(\alpha) = \alpha$, on a

$$\alpha = x + t f(x) + \frac{t^2}{1.2}\frac{d}{dx} f^2(x) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f^n(x) + \ldots.$$

Pour faire une application de la série de Lagrange, nous considérerons l'équation

(6) $$z - x - t \sin z = 0,$$

que l'on rencontre en Mécanique céleste. Nous supposerons x et t réels; pour que l'une des racines (celle qui a le plus petit module) soit développable par la série de Lagrange, il faut que l'on puisse trouver un contour fermé contenant la racine et le long duquel

$$\operatorname{mod}(z-x) > \operatorname{mod} t \sin z.$$

Si l'on pose

$$z = \xi + \eta\sqrt{-1},$$

cette inégalité équivaut à

$$\operatorname{mod}(z-x) > \operatorname{mod}\frac{t}{2}\sqrt{e^{2\eta} + e^{-2\eta} - 2\cos 2\xi}.$$

En appelant r le rayon du contour C, que nous supposerons circulaire, cette formule sera satisfaite si

$$r - \sqrt{x^2} > \frac{\sqrt{t^2}}{2}(e^r + e^{-r})$$

ou si

$$\frac{\sqrt{t^2}}{2}(e^r + e^{-r}) - r + \sqrt{x^2} < 0;$$

en d'autres termes, si l'équation

$$\frac{\sqrt{t^2}}{2}(e^r + e^{-r}) - r + \sqrt{x^2} = 0$$

a une racine positive supérieure à $\sqrt{x^2}$, la formule (5) pourra servir à développer une racine de l'équation (6). Nous n'écrirons pas ici ce développement que l'on trouvera dans tous les Traités de Mécanique céleste, et qui ne présente rien d'intéressant au point de vue analytique pur.

La démonstration que nous venons de donner de la formule de Lagrange est due à Cauchy, qui, le premier, a fixé les limites entre lesquelles était applicable cette série.

XI. — Séries de Laplace et de Legendre.

Laplace donne le moyen de résoudre par les séries l'équation

$$z = \Phi[x + tf(z)]. \tag{1}$$

Pour cela, on pose

$$\theta = x + tf(z) \quad \text{et} \quad z = \Phi(\theta);$$

par suite

$$\theta = x + tf[\Phi(\theta)].$$

Si l'on veut développer z, il n'y aura qu'à développer $\Phi(\theta)$ par la formule de Lagrange.

Legendre, dans ses *Exercices*, donne, pour la résolution de l'équation

$$f(z) - f(x) = y,$$

la formule

$$\psi(z) = \psi(x) + y\frac{\psi'(x)}{f'(x)} + \frac{y^2}{1.2}\,\mathrm{P}\left[\frac{\psi'(x)}{f'(x)}\right] + \frac{y^3}{1.2.3}\,\mathrm{P}^2\left[\frac{\psi'(x)}{f'(x)}\right]\cdots,$$

où P est un symbole opératoire défini par

$$\mathrm{P}\,\Theta(x) = \frac{1}{f'(x)}\frac{d}{dx}\,\Theta(x).$$

On la démontre en procédant comme pour établir la formule de Burmann et en partant de

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\psi(\zeta)f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta) - f(x) - y}.$$

On trouve aussi, pour le coefficient de $\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}$, la formule

$$\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\psi(z)f'(z)}{\varpi(z)}\right]\right\}_{z=x},$$

en posant

$$\varpi(\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(x)}{\zeta-x}.$$

XII. — Propriétés des fonctions rationnelles.

Dans ce qui va suivre, nous considérons tous les points à l'infini comme réunis en un seul, ainsi que nous l'avons déjà fait. Quand nous dirons que $x=\infty$ est un infini de $f(x)$, il faudra entendre par là que $x=0$ est un infini de $f\left(\frac{1}{x}\right)$; de même $x=\infty$ sera un zéro de $f(x)$ si $x=0$ est un zéro de $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Dire qu'une fonction est monogène pour $x=\infty$, c'est dire qu'elle a pour $x=\infty$ une seule dérivée finie ou infinie; dire qu'elle est monodrome, c'est dire qu'elle revient au même point avec la même valeur, quand la variable décrit un contour fermé infiniment éloigné de l'origine.

Nous avons vu que l'ordre de multiplicité d'un zéro ou d'un infini d'une fonction monodrome et monogène était nécessairement entier et fini; ceci s'applique aux zéros et aux infinis situés à l'infini, puisqu'ils se ramènent en définitive aux zéros et aux infinis situés à l'origine. Ces remarques sont tout à fait indispensables pour l'intelligence des théorèmes qui vont suivre.

Théorème I. — *Une fonction monodrome, monogène et bien déterminée autour du point α, qui devient infinie pour $x=\alpha$, est nécessairement de la forme*

$$\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha}+\theta(x),$$

$\theta(x)$ *désignant une fonction finie pour $x=\alpha$.*

En effet, soit $f(x)$ une fonction infinie pour $x = \alpha$, on peut poser

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m},$$

m désignant un entier fini et positif, $\varphi(x)$ une fonction monodrome et monogène, finie et différente de zéro pour $x = \alpha$. On a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x},$$

l'intégrale étant prise autour du point x voisin de α; on en conclut

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \varphi(z)\,dz \left[\frac{1}{z-a} + \frac{x-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(z-\alpha)^m} + \frac{(x-\alpha)^m}{(z-\alpha)^m(z-x)}\right];$$

en posant

$$2\pi\sqrt{-1}\,A_m = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\alpha}, \qquad 2\pi\sqrt{-1}\,A_{m-1} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-\alpha)^2}\cdots$$

et

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-\alpha)^m(z-x)},$$

on a alors

$$\varphi(x) = A_m + A_{m-1}(x-\alpha) + \ldots + A_1(x-\alpha)^{m-1} + \theta(x)(x-\alpha)^m;$$

on en conclut

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \theta(x),$$

ce qu'il fallait prouver.

Théorème II. — *Si une fonction bien déterminée, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, devient infinie pour $x = \infty$, sans que l'infini soit un point essentiel, elle est de la forme*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m + \theta(x),$$

$\theta(x)$ *n'étant plus infini pour* $x = \infty$ *et* $A_0, A_1, \ldots$ *désignant des coefficients constants.*

En effet, on doit avoir

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \text{ pour } x = 0;$$

donc

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A_0}{x^m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x} + \theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

ou, en changeant x en $\frac{1}{x}$,

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + \theta(x).$$

Théorème III. — *Une fonction monodrome monogène et bien déterminée dans toute l'étendue du plan, même au point à l'infini, qui admet un nombre limité d'infinis est rationnelle.*

En effet, supposons que la fonction $f(x)$ admette l'infini α, elle sera de la forme

$$\sum \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \theta(x) = f(x),$$

A_m désignant une constante et m un exposant entier fini. Mais, si $f(x)$ est encore infini pour $x = \beta$, on aura

$$\theta(x) = \sum \frac{B_n}{(x-\beta)^n} + \theta_1(x);$$

on écrira donc

$$\sum \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \sum \frac{B_n}{(x-\beta)^n} + \theta_1(x) = f(x),$$

$\theta_1(x)$ n'étant plus infini ni pour $x = \alpha$ ni pour $x = \beta$, et ainsi de suite; si $f(x)$ est encore infini pour $x = \infty$, sans que l'infini soit un point essentiel, on aura

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots \\ \qquad + a_1 x + \sum \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \ldots + \varpi(x), \end{cases}$$

$\varpi(x)$ n'étant plus jamais infini, car $\varpi(x)$ ne peut pas avoir d'autres infinis que ceux de $f(x)$. Cette formule est générale et comprend le cas où $f(x)$ n'est pas infini pour $x = \infty$; il suffit d'y supposer pour cela $a_\mu = a_{\mu-1} = \ldots = a_1 = 0$.

Mais, si $\varpi(x)$ n'est jamais infini, comme il est évidemment monodrome et monogène, il se réduit à une constante et $f(x)$ est alors une fonction rationnelle.

Théorème IV. — *Si une fonction bien déterminée monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, même à l'infini, ne devient infinie que pour $x = \infty$, elle est entière.*

En effet, la formule (1) a pour second membre une fonction entière, dans le cas où les infinis α, β, ... n'existent plus.

Il est bon d'observer qu'une fonction rationnelle quelconque a autant de zéros que d'infinis. Cela est évident quand elle est finie pour $x = \infty$, parce que le degré du numérateur doit égaler celui du dénominateur; mais, dans la fraction

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

où $\varphi(x)$ est de degré $m + n$ et où $\psi(x)$ est de degré m, il ne faut pas perdre de vue que la fraction admet pour infinis non seulement les m zéros de $\psi(x)$, mais encore des infinis au nombre de n pour $n = \infty$.

Théorème V. — *Une fonction bien déterminée, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan, même à l'infini, et qui admet un nombre limité de zéros est une fonction rationnelle.* (L'infini n'est pas censé point essentiel.) Car son inverse a un nombre limité d'infinis et est, par suite, une fonction rationnelle; la fonction elle-même est donc également rationnelle.

Théorème VII. — *Une fonction toujours monodrome et monogène sans points essentiels est rationnelle.*

En effet, on peut toujours supposer cette fonction finie

pour $x=\infty$; si cette fonction $f(x)$ devenait infinie pour x infini, on considérerait $f\left(\frac{1}{x}\right)$; si $f(0)$ était infini, en appelant n l'ordre de multiplicité de l'infini $x=0$, $x^n f(x)$ ne serait plus infini pour $x=0$ et l'on raisonnerait sur $\frac{1}{x^n} f\left(\frac{1}{x}\right)$ comme nous allons le faire sur $f(x)$.

$f(x)$ n'étant pas infini pour $x=\infty$, décrivons un cercle de l'origine comme centre avec un rayon R′, tel que $f(Re^{\theta\sqrt{-1}})$, R étant plus grand que R′, soit de module moindre que M à l'intérieur du cercle R′; $f(x)$ a un nombre limité d'infinis dans le cercle R′, il n'en a pas en dehors; donc $f(x)$ a un nombre limité d'infinis; on verrait de même qu'il a un nombre limité de zéros : il est donc rationnel. C. Q. F. D.

XIII. — Théorèmes de M. Weierstrass sur les fonctions douées de points essentiels.

Si une fonction, en général monodrome, monogène, finie, continue et bien déterminée, cesse d'être bien déterminée en un point a, on dit que ce point est un point essentiel; un infini se distingue d'un point essentiel en ce que, en un infini, l'inverse de la fonction a une valeur nulle bien déterminée, tandis que, en un point essentiel, la fonction peut bien devenir infinie; son inverse n'est pas seulement nul, mais indéterminé. Il était nécessaire de rappeler cette définition pour l'intelligence de ce qui va suivre.

Soit $f(x)$ une fonction, en général continue, monodrome et monogène à l'intérieur d'un contour fermé simple C, excepté en des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que nous supposerons être ou des infinis ou des points essentiels; on aura

$$(1)\qquad \int \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\,f(x) + \sum \int_{a_i} \frac{f(x)}{z-x}\,dz,$$

la première intégrale étant prise le long du contour C, et le

signe $\int_{a_i}$ désignant une intégrale prise le long d'un cercle infinitésimal ayant son centre au point a_i.

L'intégrale $\int \frac{f(z)}{z-x}\,dz$ est une fonction synectique de x dans l'intérieur du contour C; appelons-la $2\pi\sqrt{-1}\,\theta(x)$; nous pourrons écrire, au lieu de (1),

$$f(x) = \theta(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{a_i} \frac{f(z)\,dz}{x-z};$$

or on a

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-a_i} + \frac{z-a_i}{(x-a_i)^2} + \ldots + \left(\frac{z-a_i}{x-a_i}\right)^m \frac{1}{x-z}$$

et, par suite,

$$f(x) = \theta(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{a_i} f(z)\,dz \left[\frac{1}{x-a_i} + \frac{z-a_i}{(x-a_i)^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{z-a_i}{x-a_i}\right)^m \frac{1}{x-z}\right].$$

Supposons le point x hors des contours d'intégration circulaires : alors le long de ces contours le module de $z-a_i$ sera moindre que celui de $x-a_i$, et le terme $\left(\frac{z-a_i}{x-a_i}\right)^m \frac{1}{x-z}$ tendra vers zéro quand m croîtra indéfiniment; on a donc

$$f(x) = \theta(x) + \sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right),$$

$G_i(x)$ désignant une série limitée ou illimitée, ordonnée par rapport aux puissances de $x-a_i$: elle sera limitée si a_i est un pôle ou infini ordinaire de $f(x)$; elle sera illimitée, mais convergente, si a_i est un point essentiel.

Ainsi toute fonction qui, dans un contour C *fermé simple, a un nombre limité d'infinis ou de points essentiels* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *est de la forme*

$$\theta(x) + \sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right),$$

$\theta(x)$ *désignant une fonction synectique dans le contour* C *et* $G(x)$ *une série toujours convergente ou limitée, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de* x.

Si, à l'intérieur du contour C, la fonction $f(x)$ n'a qu'un seul infini ou point essentiel a, elle pourra, à l'intérieur de ce contour, se mettre sous la forme

$$\theta(x) + G\left(\frac{1}{x-a}\right);$$

la fonction $f(x) - G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ est donc synectique dans le contour C.

Cela posé, considérons une fonction $f(x)$ partout synectique, même à l'infini, excepté au point a qui sera un infini ou un point essentiel, dans le contour C; nous avons vu que $f(x) - G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ était synectique, mais elle est évidemment synectique partout ailleurs; en la représentant par $\theta(x)$, on a alors

$$f(x) = \theta(x) + G\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

$\theta(x)$ étant partout synectique, même à l'infini, est une fonction qui se réduit à une constante et l'on a simplement, en comprenant la constante sous le signe G,

$$f(x) = G\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Donc :

Toute fonction qui n'a qu'un infini ou un point essentiel a et qui est synectique partout ailleurs est une série limitée ou illimitée, mais convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x-a}$.

Considérons maintenant une fonction avec un seul infini ou point essentiel à l'infini, $f(x)$, alors $f\left(\frac{1}{x}\right)$ aura pour seul

infini ou point essentiel o et sera de la forme $G\left(\frac{1}{x}\right)$, $G\left(\frac{1}{x}\right)$ désignant une série toujours convergente, limitée ou illimitée, ordonnée par rapport aux puissances de $\frac{1}{x}$; donc

$$f(x) = G(x).$$

Ainsi, *les fonctions ayant un point essentiel à l'infini et d'ailleurs toujours synectiques sont les séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.*

Il est évident d'ailleurs qu'une série, toujours convergente pour des valeurs finies de x et ordonnée suivant les puissances croissantes de x, doit avoir un point essentiel à l'infini, sans quoi elle serait le développement d'une fonction entière.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction synectique dans toute l'étendue du plan, excepté en des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui seront des pôles ou des points essentiels; $f(x)$ dans un contour contenant les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est de la forme

$$\theta(x) + \sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right),$$

G_i ayant toujours la même signification que plus haut et $\theta(x)$ désignant une fonction synectique dans le contour; donc

$$f(x) - \sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right)$$

est synectique dans le contour; elle est d'ailleurs synectique en dehors du contour : elle se réduit donc à une constante; on peut supposer cette constante comprise sous l'un des signes G et écrire

$$f(x) = \sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right).$$

Enfin, si, parmi les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il y en avait un à l'infini, on observerait que, en faisant abstraction de ce point, la fonction

$$f(x) - \sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right) = \theta(x)$$

est synectique dans un contour C contenant les points critiques situés à distance finie, et qu'elle est synectique partout ailleurs, excepté à l'infini; donc $\theta(x)$ est une série $G(x)$ ordonnée suivant les puissances croissantes de x et l'on peut poser

$$f(x) = G(x) + \sum G_i\left(\frac{1}{x - a_i}\right).$$

Telle est l'expression d'une fonction synectique partout, excepté en un nombre fini de points donnés $a_1, a_2, \ldots, a_n$, expression donnée par M. Weierstrass.

XIV. — Décomposition d'une fonction en facteurs primaires.

Soit $f(x)$ une fonction monodrome et monogène finie dans toute l'étendue du plan, mais pouvant avoir un point essentiel à l'infini. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ ses zéros rangés dans un ordre tel que les nombres

$$\operatorname{mod} a_1, \quad \operatorname{mod} a_2, \quad \ldots, \quad \operatorname{mod} a_i, \quad \ldots$$

n'aillent jamais en décroissant. Soient enfin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ les ordres de multiplicité des zéros $a_1, a_2, \ldots$ respectivement.

Premier cas. — *La série*

$$(1) \qquad \frac{\alpha_1}{\operatorname{mod} a_1} + \frac{\alpha_2}{\operatorname{mod} a_2} + \ldots + \frac{\alpha_i}{\operatorname{mod} a_i} + \ldots$$

est convergente.

Alors la suivante l'est aussi

$$\frac{\alpha_1}{\operatorname{mod} a_1\left(1 - \operatorname{mod}\dfrac{x}{a_1}\right)} + \frac{\alpha_2}{\operatorname{mod} a_2\left(1 - \operatorname{mod}\dfrac{x}{a_2}\right)} + \ldots,$$

car on l'obtient en multipliant les termes de la première par des nombres qui finissent par devenir moindres que 2, par exemple. Il en résulte que la série suivante

$$\frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{\alpha_i}{x - a_i} + \ldots,$$

dont les termes ont des modules moindres que les termes de la précédente, l'est aussi. Ceci posé, considérons la fonction

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\alpha_i}{x - a_i};$$

elle est finie pour $x = a_i$, donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \sum \frac{\alpha_i}{x - a_i} = G(x)$$

est une fonction finie dans toute l'étendue du plan, et, en intégrant, on a

$$\log \frac{f(x)}{f(0)} - \log \Pi \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^{\alpha_i} = \int_0^x G(x)\,dx,$$

$$f(x) = f(0)\,e^{\int G(x)\,dx}\,\Pi \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^{\alpha}.$$

Deuxième cas. — *Je suppose que la série* (1) *soit divergente, mais qu'il existe un exposant* ω, *tel que la suivante soit convergente*

(2) $$\frac{\alpha_1}{(\mathrm{mod}\, a_1)^{\omega+1}} + \frac{\alpha_2}{(\mathrm{mod}\, a_2)^{\omega+1}} + \ldots;$$

posons

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{a_i} + \frac{x}{a_i^2} + \ldots + \frac{x^{\omega-1}}{a_i^{\omega}},$$

nous aurons

$$\frac{1}{a_i - x} = \varphi_i(x) + \frac{x^{\omega}}{a_i^{\omega}(a_i - x)}.$$

La série suivante sera uniformément convergente, excepté pour $x = a_1$, $x = a_2$, ...

$$\sum \frac{\alpha_i x^{\omega}}{a_i^{\omega}(a_i - x)} = \sum \frac{\alpha_i x^{\omega}}{a_i^{\omega+1}\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)};$$

cette série peut s'écrire

$$-\sum \left[\frac{\alpha_i}{x - a_i} + \alpha_i\, \varphi_i(x)\right],$$

et la fonction

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \sum \left[\frac{\alpha_i}{x - a_i} + \alpha_i \varphi_i(x) \right] = G(x)$$

est finie, même pour $x = a_1, a_2, \ldots$. En intégrant, on a

$$\log \frac{f(x)}{f(0)} - \sum \left[\log \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^{\alpha_i} + \alpha_i \int_0^x \varphi_i(x)\,dx \right] = \int_0^x G(x)\,dx$$

ou

$$f(x) = f(0) e^{\int_0^x G\,dx} \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^{\alpha_i} e^{\alpha_i \int_0^x \varphi_i(x)\,dx} \right].$$

Troisième cas. — *Les séries* (1) *et* (2) *sont divergentes quel que soit* ω.

On posera

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{a_i} + \frac{x}{a_i^2} + \frac{x^2}{a_i^3} + \ldots + \frac{x^{i-1}}{a_i^i};$$

on en conclura

$$\frac{1}{a_i - x} = \varphi_i(x) + \frac{x^i}{a_i^i(a_i - x)}.$$

La série

$$\sum \frac{\alpha_i x^i}{a_i^i(a_i - x)}$$

sera convergente, car la racine $i^{\text{ième}}$ de son $i^{\text{ième}}$ terme est

$$\frac{x \sqrt[i]{\alpha_i}}{a_i \sqrt[i]{a_i - x}} = \frac{x \sqrt[i]{\alpha_i}}{a_i \sqrt[i]{a_i} \sqrt[i]{\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)}},$$

qui finit par tendre vers 0. Cette série peut s'écrire

$$\sum \left[\frac{\alpha_i}{a_i - x} - \alpha_i \varphi_i(x) \right];$$

la fonction

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \sum \left[\frac{\alpha_i}{x - a_i} + \alpha_i \varphi_i(x) \right] = G(x)$$

est finie, même pour $x = a_1, a_2, \ldots$; en intégrant alors, on a

$$\log \frac{f(x)}{f(0)} - \sum \left[\log \left(1 - \frac{x}{a_i} \right)^{\alpha_i} + \alpha_i \int_0^x \varphi_i(x)\,dx \right] = \int_0^x \mathrm{G}\,dx$$

ou

$$(4) \qquad f(x) = f(0)\, e^{\int_0^x \mathrm{G}(x)\,dx}\, \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{a_i} \right)^{\alpha_i} e^{\alpha_i \int_0^x \varphi_i(x)\,dx} \right].$$

Les facteurs de la forme

$$\left(1 - \frac{x}{a_i} \right) e^{\int_0^x \varphi_i(x)\,dx}$$

sont ce que l'on appelle des *fonctions primaires.*

Une fonction finie est donc toujours décomposable en facteurs primaires.

L'analyse que nous venons de développer met aussi en évidence ce fait que, *étant donnés des zéros d'un ordre de multiplicité fini, et tels qu'il y en ait un nombre fini dans une étendue finie du plan, il est toujours possible de former une fonction synectique, excepté pour $x = \infty$ admettant ces zéros : cette fonction est de la forme* (4).

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ avec des zéros et des infinis quelconques, mais sans points essentiels, excepté à l'infini : on pourra toujours former une fonction toujours finie $\mathrm{F}(x)$, excepté pour $x = \infty$ admettant pour zéros les infinis de $f(x)$; alors $f(x)\ \mathrm{F}(x)$ sera fini et on pourra le représenter par $\mathrm{G}(x)$; on aura donc

$$f(x) = \frac{\mathrm{G}(x)}{\mathrm{F}(x)}.$$

Donc :

Une fonction qui n'a pas d'autre point essentiel que le point situé à l'infini est le quotient de deux fonctions qui n'ont plus d'infinis, et qui n'ont d'autres points essentiels que le point situé à l'infini.

Les théorèmes exposés dans ce paragraphe et le précédent sont dus à M. Weierstrass (*Abhandlungen der könig. Akad.*

der Wissenschaften zu Berlin, 1876. — *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, 1879).

M. Mittag-Leffler, qui a simplifié les démonstrations de M. Weierstrass, a donné une expression d'une fonction qui possède une infinité de points essentiels et a complété ainsi le théorème de Cauchy (p. 317).

Voici son analyse (*Comptes rendus* du 30 janvier 1882).

XV. — Théorème de M. Mittag-Leffler.

Soit $f(z)$ une fonction admettant des points critiques en nombre fini ou infini (pôles ou points essentiels) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tels que ces points soient toujours séparés par un intervalle fini et que $\lim a_n = \infty$ pour $n = \infty$; supposons d'ailleurs $f(x)$ synectique, excepté en $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Soit C un contour fermé simple contenant les points $a_1, a_2, \ldots$, le point x et l'origine des coordonnées; on aura, en intégrant le long de ce contour,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^\nu \\ &\quad = \mathcal{E}_x \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^\nu + \mathcal{E}_0 \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^\nu + \sum \mathcal{E}_{a_i} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^\nu. \end{aligned}\right.$$

Or, en supposant que le point o ne soit pas critique, on a

$$\mathcal{E}_x \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^\nu = f(x),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^\nu &= \frac{x^\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} \Big|^{z=0} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} \frac{f(z)}{z-x} \\ &= \frac{x^\nu}{1.2.3\ldots(\nu-1)}\left[-\frac{f^{\nu-1}(0)}{x} - \frac{\nu-1}{1}\frac{f^{\nu-2}(0)}{x^2}\ldots\right] \\ &= -\left[f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{1.2\ldots(\nu-1)}f^{\nu-1}(0)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{a_i} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^\nu \\ &= -\mathcal{E} f(z)\frac{(x-a_i)^\nu + \nu a_i (x-a_i)^{\nu-1} + \ldots}{z^\nu}\left[\frac{1}{x-a_i} + \frac{z-a_i}{(x-a_i)^2} + \ldots\right] \\ &= -\mathrm{F}_i(x) - \mathrm{G}_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right), \end{aligned}$$

F_i désignant un polynôme entier en x et $G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right)$ une série toujours convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $\frac{1}{x-a_i}$. La formule (1) devient alors

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{\nu}=f(x)-F(x)-\sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right),$$

$F(x)$ désignant un polynôme de degré $\nu-1$. Si alors l'intégrale

$$\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{\nu}$$

tend vers 0, pour une valeur de ν convenablement choisie, quand le contour C se déforme en embrassant un nombre de points a_1, a_2, ..., indéfiniment croissant, on aura

$$(3) \qquad f(x)=F(x)+\sum G_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right).$$

Telle est l'expression, sous la condition dont nous venons de parler, donnée par M. Mittag-Leffler d'une fonction avec une infinité de points singuliers.

Nous avons tacitement supposé que le point 0 n'était pas un pôle ou un point essentiel; dans le cas où ce point serait critique, il n'est pas difficile de voir qu'en appelant $H(x)$ une série toujours convergente, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x, il faudrait ajouter au second membre de (3) une expression de la forme $H\left(\frac{1}{x}\right)$.

XVI. — Sur les fonctions qui présentent une ligne de points critiques.

Il peut arriver qu'une fonction présente une infinité de points critiques infiniment rapprochés et formant une ligne continue ou discontinue.

Soient m_0, m_1, m_2, ... une suite de nombres entiers et

positifs, tels que $\lim m_n = \infty$ pour $n = \infty$, on a identiquement

$$\frac{1+x^{m_n}}{1-x^{m_n}} = \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \left(\frac{1+x^{m_1}}{1-x^{m_1}} - \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}}\right) + \left(\frac{1+x^{m_2}}{1-x^{m_2}} - \frac{1+x^{m_1}}{1-x^{m_1}}\right) + \ldots.$$

Si l'on suppose alors $n = \infty$, on voit que, en posant

$$\psi(x) = \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \left(\frac{1+x^{m_1}}{1-x^{m_1}} - \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}}\right) + \ldots,$$

la fonction $\psi(x)$ sera égale à $+1$ ou à -1 suivant que le module de x sera inférieur ou supérieur à un. Cette remarque curieuse a été faite par M. Tannery. Si l'on suppose $m_0 = 1$, $m_1 = 2$, $m_2 = 2^2$, ..., on trouve

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \ldots.$$

M. Weierstrass pose dans cette formule $x = \frac{x'-1}{x'+1}$; la fonction $\psi\left(\frac{x'-1}{x'+1}\right)$ est égale à $+1$ ou à -1 suivant que la partie réelle de x' est positive ou négative; cela résulte du théorème suivant :

Si l'on fait

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\delta \gtrless 0$$

lorsque le point x décrit un cercle ayant pour centre l'origine, le point x' décrit un cercle (*ou une droite*). En effet, supposer que x décrit un cercle ayant son centre à l'origine, c'est supposer

$$\operatorname{mod} \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{\operatorname{mod}(\alpha x' + \beta)}{\operatorname{mod}(\gamma x' + \delta)} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{\operatorname{mod}(x' - a)}{\operatorname{mod}(x' - b)} = \text{const.},$$

a et b désignant des points fixes; le point x' décrit donc une

courbe telle que le rapport de ses distances à deux points fixes soit constant, c'est-à-dire un cercle.

Si l'on fait décrire au point x un cercle quelconque autour du point C *comme centre, le point x — C décrit un cercle autour de l'origine et, par suite, x' décrit encore un cercle.*

Ceci posé, soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions quelconques, si l'on fait

$$F(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2}, \qquad G(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2},$$

la fonction

$$F(x) + \psi(x)G(x),$$

pour des valeurs du module de x inférieures à un, sera égale à $F(x) - G(x) = g(x)$, et, pour des valeurs du module de x supérieures à un, elle sera égale à $F(x) + G(x)$, c'est-à-dire égale à $f(x)$.

On conçoit ainsi la possibilité de former des fonctions égales à des fonctions données dans des portions données du plan. Cette remarque est due à M. Weierstrass. Pour les fonctions $F + G\psi$ et ψ, il est clair que le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon un est une ligne de points singuliers ou, si l'on veut, une ligne singulière.

Considérons encore la série

$$\psi(x) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \dots + m_p}},$$

dans laquelle $u_1, u_2, \dots, u_p$ désignent des quantités moindres que un en valeur absolue, $a_1, a_2, \dots, a_p$, x des nombres quelconques et $m_1, m_2, \dots m_p$ des nombres variant de 1 à ∞. Prenons des points $a_1, a_2, \dots$ pour sommets d'un polygone convexe P, de manière qu'à l'extérieur de ce polygone P il n'y ait pas de points a (il pourra en contenir dans son intérieur); le point

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \dots + m_p}$$

est le centre de gravité des poids m_1, m_2, ... placés en a_1, a_2, ... respectivement; ce point est intérieur au polygone P et j'ajoute que tout point intérieur au polygone P peut être représenté par une affixe de la forme précédente, dans laquelle m_1, m_2, ... seront convenablement choisis; il en résulte que $\psi(x)$ n'a de valeur finie pour aucun point intérieur au polygone P : il est au contraire bien déterminé pour toutes les valeurs de x extérieures au polygone P; la fonction $\psi(x)$, signalée par M. Poincaré, jouit donc de la propriété de présenter ce que l'on appelle une fonction avec un espace *lacunaire*, c'est-à-dire un espace dans lequel elle n'a pas de valeur déterminée.

Mais il est évident que, par cela même qu'une fonction n'a pas de valeur déterminée dans un espace lacunaire, on peut lui en fixer une et la déterminer arbitrairement dans cet espace; on peut, par exemple, l'assujettir à coïncider dans cet espace avec x, x^2, ... L'existence des espaces lacunaires est seulement à ce point de vue l'existence d'une ligne de points singuliers essentiels fermée.

Considérons, par exemple, la fonction définie par le produit

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^n)\dots,$$

toujours convergent et uniformément convergent quand x reste compris dans un cercle de rayon un, décrit de l'origine comme centre, mais divergent sur la circonférence de ce cercle et en dehors. Cette fonction est célèbre : on dit qu'elle a pour espace lacunaire l'extérieur du cercle de convergence, ou encore que la fonction

$$(\alpha) \qquad \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{x^n}\right)\cdots = \theta(x)$$

a pour espace lacunaire le cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon égal à un. Rien n'empêche donc de dire qu'en dedans de ce cercle la fonction $\theta(x)$ est définie et bien définie par la relation

$$\theta(x) = \theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

et que le cercle en question est une ligne de points singuliers essentiels. La série

$$\mathrm{I} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

représente $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - x}$ à l'intérieur du cercle de rayon un décrit de l'origine comme centre, et est divergente quand le module de x est plus grand que un. Il ne vient à l'esprit de personne de dire que la partie du plan extérieure au cercle est un espace lacunaire pour la fonction qui est représentée par la série, parce que, sur la circonférence du cercle de convergence, la série peut encore être convergente.

XVII. — Des fonctions représentées par des intégrales définies.

Considérons l'intégrale définie suivante où f est monodrome

$$\mathrm{U} = \int_{t_0}^{t_1} f(z, t)\,dt;$$

elle représente évidemment une fonction de z, et cette fonction est discontinue, pour toutes les valeurs de z telles que l'on ait

$$(\mathrm{I}) \qquad f(z, t) = \infty,$$

t variant de t_0 à t_1. Or, en faisant varier ainsi t, le point z décrit une ligne droite ou courbe limitée, pouvant d'ailleurs se composer de plusieurs branches que nous appellerons *coupures*, avec M. Hermite. En dehors de ces coupures U est évidemment monodrome et monogène par rapport à z.

Ceci posé, soient z' un point d'une coupure C, t' la valeur de t tirée de (I) quand on y suppose $z = z'$; proposons-nous de calculer la différence

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} f(z' + \zeta, t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} f(z' - \zeta, t)\,dt,$$

les points $z + \zeta$ et $z - \zeta$ n'étant pas sur la coupure, mais situés de part et d'autre de cette coupure, et infiniment voisins l'un de l'autre.

Si nous intégrons de t_0 à $t'-R$ et de $t'+R$ à t_1, R désignant une quantité petite mais finie, la différence des deux intégrales considérées sera nulle avec ζ et nous sommes ramenés à calculer la différence

$$\Delta = \int_{t'-R}^{t'+R} f(z'+\zeta, t)\,dt - \int_{t'-R}^{t'+R} f(z'-\zeta, t)\,dt,$$

pour ζ infiniment petit. Or décrivons du point t' comme centre un cercle A de rayon R, $f(z'+\zeta, t)$ deviendra infini pour une valeur T de t très voisine de t', et par suite que l'on pourra supposer intérieure au cercle A; la valeur T' de t qui rend infinie $f(z'-\zeta, t)$ sera également intérieure au cercle A, mais ces deux valeurs seront situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des x. En effet, soit $\chi(z, t) = \frac{1}{f(z, t)}$; on a

$$\chi(z'+\zeta, T) = 0, \qquad \chi(z'-\zeta, T') = 0$$

ou, posant $T = t'+\theta$ et $T' = t'+\theta'$,

$$\chi(z'+\zeta, t'+\theta) = 0, \qquad \chi(z'-\zeta, t'+\theta') = 0.$$

Développant par la formule de Taylor et observant que $\chi(z', t') = 0$, on trouve

$$\zeta\frac{\partial\chi}{\partial z'} + \theta\frac{\partial\chi}{\partial t'} + \frac{1}{1.2}\left(\zeta^2\frac{\partial^2\chi}{\partial z'^2} + \ldots\right) = 0,$$

$$-\zeta\frac{\partial\chi}{\partial z'} + \theta'\frac{\partial\chi}{\partial t'} + \frac{1}{1.2}\left(\zeta^2\frac{\partial^2\chi}{\partial z'^2} + \ldots\right) = 0;$$

si les dérivées de χ ne sont pas nulles, θ et θ' sont évidemment à peu près égaux et de signes contraires, pour des valeurs suffisamment petites de ζ.

Plaçons-nous dans cette hypothèse, l'intégrale

$$\int_{t'-R}^{t'+R} f(z'+\zeta, t)\,dt$$

sera alors égale à l'intégrale

$$\int f(z'+\zeta, t)\,dt,$$

prise le long du demi-cercle tracé au-dessus et au-dessous de l'axe des x, du point t' comme centre avec R pour rayon. Selon que le point $t'+\theta$ rendant infini $f(z, t'+\theta)$ sera au-dessous ou au-dessus de l'axe des x, l'intégrale

$$\int_{t'-R}^{t'+R} f(z'-\zeta, t)\,dt$$

sera égale à l'intégrale

$$\int f(z'-\zeta, t)\,dt,$$

prise le long de l'autre demi-cercle ; la différence Δ sera donc donnée par la formule

$$\Delta = \pm\pi\sqrt{-1}\left[\mathcal{E} f(z'+\zeta, t) + \mathcal{E} f(z'-\zeta, t)\right];$$

les résidus étant relatifs aux points situés dans le cercle A, on en déduit, pour $\zeta = 0$,

$$\Delta = \pm 2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E} f(z', t).$$

Quand $\frac{\partial \chi}{\partial t'}$ ou $\frac{\partial \chi}{\partial z'}$ seront nuls, cette formule pourra subsister, mais on pourra aussi avoir $\Delta = 0$; en tout cas, une discussion facile permettra de trancher la difficulté.

XVIII. — Étude de l'intégrale $\int f(t+z)\,dt$.

Supposons que $f(t)$ soit une fonction rationnelle dont le numérateur soit de degré inférieur de deux unités à celui du dénominateur : l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

sera finie, si le point z n'est pas sur une coupure. Or, si a, b, c, ... sont les infinis de $f(t)$, les coupures auront pour équations

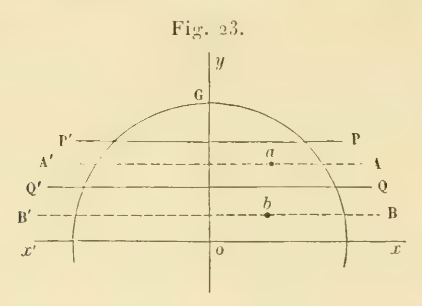
$$z+t=a, \qquad z+t=b, \qquad \ldots$$

et seront, par suite, des droites ayant pour équations

$$x = \alpha - t, \qquad x = \alpha' - t, \qquad \ldots,$$
$$y = \beta, \qquad y = \beta', \qquad \ldots;$$

$a, b, \ldots$ étant représentées par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \ldots$ les coupures seront donc des droites parallèles à l'axe des x AA', BB', ... passant par les points critiques de $f(t)$. Supposons que les points $a, b, c, \ldots$ soient rangés par ordre de distance à l'axe des x : si l'on décrit un cercle de rayon infini

Fig. 23.



de l'origine comme centre et si l'on mène des droites P'P, Q'Q, ..., parallèles à l'axe des x entre les coupures, l'intégrale de $f(t+z)$ prise le long du contour P'PGP' sera nulle; l'intégrale prise le long de Q'QGQ' sera $\mathcal{E}_a f(t) 2\pi\sqrt{-1} \ldots$, et, comme l'intégrale prise le long du contour circulaire est nulle, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt = 0,$$

si z est sur PP', c'est-à-dire au-dessus de la coupure passant par a;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{E}_a f(t),$$

si z est entre la coupure passant par a et b;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt = 2\pi\sqrt{-1}\left[\mathcal{E}_a f(t) + \mathcal{E}_b f(t)\right];$$

si z est entre la coupure passant par b et par c, etc.

En résumé, l'intégrale en question représente une fonction

constante entre deux coupures consécutives, mais changeant de valeur dès que l'on franchit une coupure.

Considérons encore l'intégrale

$$\int_{\omega}^{\omega+2\pi} f(z+t)\,dt,$$

$f(t)$ désignant une fonction ayant pour période 2π (*voir* p. 384). Si les infinis de $f(t)$ sont a, b, ..., les coupures auront pour équations, comme tout à l'heure, $x = \alpha - t$, $y = \beta$, ... et se composeront de portions de droites parallèles à l'axe des x et de longueur 2π. Mais, a étant un infini, $2\pi + a$ en est un aussi, en sorte qu'une infinité de coupures se feront suite à elles-mêmes, et l'ensemble des coupures fournira une suite de parallèles indéfinies à l'axe des x, passant par les points critiques.

Si l'on intègre $f(z+t)$ le long d'un parallélogramme ayant pour côtés une droite de longueur 2π parallèle à l'axe des x, et une parallèle à cette droite, puis deux côtés perpendiculaires à ceux-ci, l'intégrale sera égale à $2\pi\sqrt{-1}$ multipliés par le résidu z relatif au parallélogramme; or les intégrales prises le long des côtés parallèles à l'axe des y sont égales et de signes contraires, puisque $f(t) = f(t+2\pi)$; on a donc

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z+t)\,dt = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z'+t)\,dt + \varepsilon.\,2\pi\sqrt{-1}.$$

Si donc le parallélogramme ne contient pas d'infinis de $f(t)$, on aura $\varepsilon = 0$; ainsi, l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t+z)\,dt$$

conserve une valeur constante tant que le point z ne franchit pas de coupure.

XIX. — Réflexions sur la métaphysique de l'hyperespace.

Au fond, dans la théorie de l'hyperespace, nous n'avons emprunté à la Géométrie que son langage, uniquement pour

éviter quelques périphrases, et tout ce que nous avons dit serait parfaitement correct, lors même que nous n'aurions aucune notion de l'espace ordinaire. Cette remarque a une grande importance au point de vue purement philosophique : il en résulte, en effet, que toute la théorie géométrique, en apparence, des intégrales définies de Cauchy et les conséquences que nous en avons déduites sur les propriétés des fonctions sont au fond indépendantes du postulatum d'Euclide, bien qu'il y soit fait usage de coordonnées. Rien n'empêche, en effet, de raisonner sans figures, en considérant, même dans la Géométrie à deux dimensions, les points, les lignes, les surfaces, etc., définis comme on l'a fait dans l'hyperespace en général.

Il ne faudrait donc pas essayer de fonder une démonstration du postulatum d'Euclide sur ce fait que les intégrales trouvées par le calcul des résidus peuvent se trouver avec les mêmes valeurs par des méthodes qui n'empruntent rien à la Géométrie.

EXERCICES ET NOTES.

1. Si l'on considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et si l'on suppose $a > 0$ et $bc > 0$ (ce qui est toujours possible en changeant le signe des racines), on a, en appelant x la plus petite des racines,

$$x = -\frac{c}{b}\left(1 + \frac{1}{4}t + \frac{1.3}{4.6}t^2 + \frac{1.3.5}{4.6.8}t^3 + \ldots\right),$$

$$t = \frac{4ac}{b^2};$$

$$\log x = \log\left(-\frac{c}{b}\right) + u + \frac{u^2}{1.2}3 + \frac{u^3}{1.2.3}5.4 + \frac{u^5}{1.2.3.4.5}7.6.5 + \ldots,$$

$$u = \frac{ac}{b^2}.$$

2. Si l'on a

$$x^{m+1} + px - q = 0,$$

on en déduira

$$x = \frac{q}{p} - \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} + \frac{1}{p^2}\left(\frac{q}{p}\right)^{2m+1}\frac{2m+2}{1.2}$$
$$- \frac{1}{p^3}\left(\frac{q}{p}\right)^{3m+1}\frac{(3m+2)(3m+3)}{1.2.3} + \ldots$$

3. Développer une racine de l'équation suivante en série :

$$\sin x - \sin a = x.$$

4. Soient $f(z)$ un polynôme entier en z et $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de l'équation

$$z - x - tf(z) = 0,$$

on aura

$$\sum x^{-n} = \frac{1}{x^n} + t\,\mathrm{D}\left(\frac{1}{x^n}\right)f(x) + \ldots$$
$$+ \frac{t^p}{1.2.3\ldots p}\,\mathrm{D}^p\left(\frac{1}{x^n}\right)[f(x)]^p + \ldots,$$

$\mathrm{D}^p u$ désignant en général la dérivée $p^{\text{ième}}$ de u relative à x; pourvu que, dans le développement des coefficients de $t, t^2, \ldots, t^p$, on ne prenne pas les termes contenant x en dénominateur.

(Lagrange.)

5. Si l'on considère l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_m x^m = 0$$

et s'il existe un contour fermé simple C, tel que le module de $a_i x^i$ soit plus grand sur ce contour que le module de la somme des autres termes, le contour C contiendra i racines de l'équation précédente.

6. Trouver une limite supérieure du reste dans la série de Lagrange. (Plusieurs solutions ont été données par Cauchy.)

CHAPITRE IX.

DES FONCTIONS PÉRIODIQUES.

I. — Définition et propriétés des fonctions périodiques.

Une fonction $f(x)$ est *périodique* et possède la *période* ω, si l'on a

$$f(x+\omega)=f(x)$$

et par suite, n désignant un entier quelconque,

$$f(x+n\omega)=f(x).$$

Le type des fonctions périodiques est la fonction $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}x}$, qui peut se mettre sous la forme $\cos\frac{2\pi}{\omega}x+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\omega}x$ et a manifestement la période ω. Posons

$$y=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}x}, \qquad x=\xi+\eta\sqrt{-1}, \qquad \omega=a+b\sqrt{-1};$$

on aura, à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ près,

$$\log y=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}x=\frac{-2\pi}{a^2+b^2}(a\eta-b\xi)+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{a^2+b^2}(a\xi+b\eta);$$

le module de y ou plutôt son logarithme

$$-\frac{2\pi}{a^2+b^2}(a\eta-b\xi),$$

restant constant, le point x ou (ξ,η) décrit la droite

$$a\eta-b\xi=-\frac{a^2+b^2}{2\pi}\log\operatorname{mod}y.$$

Ainsi, quand le point x décrit des droites parallèles à la période, le point y décrit des cercles concentriques à l'origine, et *vice versa;* si l'on suppose que les rayons de ces cercles aillent en grandissant à partir de zéro, les droites décrites par le point x seront d'abord très éloignées, se rapprocheront, passeront par l'origine quand $\operatorname{mod} y = 1$, puis s'éloigneront indéfiniment en marchant toujours dans le même sens.

Supposons que le point x se meuve entre deux parallèles à la période, le point y se mouvra entre deux cercles concentriques à l'origine.

Maintenant considérons une fonction $f(x)$ quelconque ayant la période ω; si, le point x se mouvant entre deux parallèles à la période, $f(x)$ reste monodrome, monogène finie et continue, cette fonction restera aussi monodrome, monogène finie et continue quand le point $y = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}x}$ se mouvra dans une couronne circulaire de rayons r et r' que l'on peut déterminer; $f(x)$ sera donc développable, en vertu du théorème de Laurent, suivant les puissances positives et négatives de $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}x}$ ou, ce qui revient au même, suivant une double série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi x}{\omega}$.

Si la fonction $f(x)$ ne possédait pas la période ω, elle ne serait pas monodrome en y et par suite ne serait pas développable comme il a été dit.

II. — Formule d'Abel.

Dans les *Œuvres posthumes* d'Abel, on trouve l'ébauche d'un singulier calcul auquel il donnait le nom de *calcul des fonctions génératrices et de leurs déterminantes*. Ce calcul, malgré son manque absolu de rigueur, paraît d'une puissance incroyable, et sans doute il aurait acquis entre les mains de son illustre inventeur toute la perfection que l'on exige dans les Sciences exactes, s'il lui avait été donné de

vivre encore quelques années. A l'aide de ce calcul, il parvient à la formule suivante

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x+a) &= \varphi(x) + a\varphi'(x+b) + \frac{a(a-2b)}{1.2}\varphi''(x+2b) + \ldots \\ &+ \frac{a(a-nb)^{n-1}}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(a+nb) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

qui, étudiée par M. Halphen, a été reconnue inexacte dans un grand nombre de cas; en particulier, quand $\varphi(x) = \log x$, le second membre, loin de représenter $\log(a+x)$, représente une transcendante nouvelle.

Quoi qu'il en soit, M. Bertrand démontre, dans son *Traité de Calcul différentiel*, que, si la fonction $\varphi(z)$ est développable suivant les puissances de e^z, la formule (1) aura lieu pour cette fonction. A cet effet, il s'appuie sur la formule suivante, donnée page 352, et que l'on déduit de la formule de Burmann,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} e^{az} &= 1 + a\frac{z}{1}e^{bz} + a(a-2b)e^{2bz}\frac{z^2}{1.2} \\ &+ a(a-3b)e^{3bz}\frac{z^3}{1.2.3} + \ldots; \end{aligned} \right.$$

soit

$$(3)\qquad \varphi(z) = A_0 + A_1 e^z + A_2 e^{2z} + \ldots;$$

si, dans la formule (2), on fait $z = 0, 1, 2, \ldots$, on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ e^a &= 1 + ae^b + a(a-2b)e^{2b}\frac{1}{1.2} \\ &\quad + a(a-3b)e^{3b}\frac{1}{1.2.3} + \ldots, \\ e^{2a} &= 1 + 2ae^{2b} + 2^2a(a-2b)e^{4b}\frac{1}{1.2} \\ &\quad + 2^3a(a-3b)e^{6b}\frac{1}{1.2.3} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{na} &= 1 + nae^{nb} + n^2a(a-2b)e^{2nb}\frac{1}{1.2} \\ &\quad + n^3a(a-3b)e^{3nb}\frac{1}{1.2.3} + \ldots. \end{aligned}$$

Multiplions la première équation par A_0, la seconde par $A_1 e^x$, la troisième par $A^2 e^{2x}$, etc., et ajoutons ; nous aurons, en vertu de la formule (3), la formule (1) qu'il s'agissait de démontrer.

La formule d'Abel appliquée à la fonction $(x+a)^m$ fournit une formule donnée de son vivant par ce géomètre, et qui a fait l'objet d'un de ses premiers Mémoires ; cette formule est vraie quand m est entier et positif :

$$(x+a)^m = x^m + ma(x+b)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a(a-2b)(x+2b)^{m-2} + \ldots ;$$

quand on suppose $m = -1$, cette formule est inexacte, et elle donne

$$\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} - a\frac{1}{(x+b)^2} + a(a-2b)\frac{1}{(x+2b)^3} - \ldots,$$

qui n'a évidemment pas lieu pour $x = -b, -\frac{b}{2}, \cdots$ ou pour $a = 2b, \ldots$; cela n'a rien d'étonnant, puisque $\frac{1}{x}$ n'est pas développable en séries d'exponentielles.

III. — Introduction à la théorie des séries trigonométriques. Démonstration d'une formule d'Analyse.

Nous allons nous proposer de calculer la valeur de l'intégrale

$$V = \int_a^b f(x)\frac{\sin \omega x}{\sin x}\,dx,$$

pour $\omega = \infty$. Cette recherche n'est pas un pur objet de curiosité, et nous verrons que l'on peut en faire des applications utiles. En posant $\omega x = t$ ou $x = \frac{t}{\omega}$, on a

$$V = \frac{1}{\omega}\int_{\omega a}^{\omega b} f\left(\frac{t}{\omega}\right)\frac{\sin t}{\sin\left(\frac{t}{\omega}\right)}\,dt.$$

Nous poserons

$$A_i = \frac{1}{\omega}\int_{\omega a + 2\pi i}^{\omega a + 2\pi(i+1)} f\left(\frac{t}{\omega}\right)\frac{\sin t}{\sin\left(\frac{t}{\omega}\right)}\,dt;$$

nous aurons alors

$$V = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n;$$

les intégrales A_0, A_1, ... sont prises entre des limites dont la différence est 2π, la dernière A_n seule pourra avoir des limites moins étendues, à savoir $\omega a + 2\pi n$ et ωb.

1° Supposons d'abord que $\sin x$ ne s'annule pas entre les limites a et b, et que, dans cet intervalle, $\frac{f(x)}{\sin x}$ reste positif et continu. Si, dans l'intégrale A_i, on remplace $\frac{f\left(\frac{t}{\omega}\right)}{\sin\left(\frac{t}{\omega}\right)}$ par son minimum m_i si l'élément $\sin t\,dt$ est négatif, et par son maximum M_i si cet élément est positif, cette intégrale augmentera et, par suite, on aura

$$A_i < \frac{M_i - m_i}{\omega}\int \sin t\,dt \quad \text{ou} \quad < 2\,\frac{M_i - m_i}{\omega}$$

et

$$V < \sum 2\,\frac{M_i - m_i}{\omega}.$$

En appelant alors μ la plus grande des différences $M_i - m_i$, on trouvera

$$V < 2\sum \frac{\mu}{\omega} \quad \text{ou} \quad < 2\mu\,\frac{n+1}{\omega}.$$

En observant que

$$2(n+1)\pi > \omega(b-a) > 2n\pi,$$

on aura

$$V < \frac{2\mu}{\pi} + \frac{b-a}{\pi}\,\mu.$$

La fonction $\frac{f(x)}{\sin x}$ étant continue, μ tend vers zéro quand ω croît et, par suite, V tend aussi vers zéro quand ω croît.

Nous arriverions aux mêmes conclusions en supposant $\frac{f(x)}{\sin x}$ négatif, et par suite, si, dans l'intervalle a, b, cette fonction pouvait passer plusieurs fois du positif au négatif (sans que $\sin x$ s'annule), on aurait encore $V = 0$; il suffirait en effet, pour le prouver, de décomposer l'intégrale V en plusieurs autres dont les limites correspondraient aux changements de signe de $f(x)$. Ce raisonnement, toutefois, tomberait en défaut, si, dans l'intervalle a, b, $f(x)$ pouvait passer une infinité de fois du positif au négatif; ce cas ne se présente pas d'ordinaire en Analyse.

2° Examinons maintenant le cas où $\sin x$ change de signe entre a et b. Supposons d'abord, pour simplifier, que l'on ait $\sin a = 0$ et $b - a < \pi$, en sorte que $\sin x$ ne s'annule plus entre a et b. Soit ε un nombre très petit; il est clair que l'on pourra écrire

$$V = \int_a^{a+\varepsilon} f(x) \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx + \int_{\varepsilon+a}^{b} f(x) \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx,$$

et que, la dernière intégrale étant nulle, on aura

$$V = \int_a^{a+\varepsilon} f(x) \frac{\sin \omega x}{\sin x}\, dx.$$

Or a est un multiple de π, puisque $\sin a = 0$; soit donc $a = k\pi$, si l'on pose alors $x = k\pi + t$, il viendra

$$V = \int_0^{\varepsilon} f(k\pi + t) \frac{\sin \omega (k\pi + t)}{\sin (k\pi + t)}\, dt.$$

Dans les applications que nous ferons de notre formule, ω sera un nombre impair, de sorte que l'on pourra écrire

$$V = \int_0^{\varepsilon} f(k\pi + t) \frac{\sin \omega t}{\sin t}\, dt = \int_0^{\varepsilon} f(k\pi + t) \frac{t}{\sin t} \frac{\sin \omega t}{t}\, dt$$

(et cette conclusion serait encore exacte, quel que soit ω,

si a était nul). Soit θ un nombre compris entre o et ε, on aura, comme l'on sait,

$$V = f(k\pi + \theta\varepsilon)\left(\frac{\theta\varepsilon}{\sin\theta\varepsilon}\right)\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin\omega t}{t}\,dt$$

et, en faisant $\omega = \infty$,

$$V = f(k\pi)\lim\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin\omega t}{t}\,dt;$$

mais, en faisant $\omega t = z$, on a

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin\omega t}{t}\,dt = \int_0^{\omega\varepsilon}\frac{\sin z}{z}\,dz,$$

et, pour $\omega = \infty$, on a $\omega\varepsilon = \infty$ et, par suite,

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin\omega t}{t}\,dt = \int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2};$$

on a donc

$$V = \frac{\pi}{2}f(k\pi) = \frac{\pi}{2}f(a).$$

Si $\sin x$ s'annulait pour $x = b$, mais pour aucune autre valeur comprise entre a et b, on aurait encore

$$V = \frac{\pi}{2}f(b).$$

3° Arrivons au cas général et supposons que $\sin x$ s'annule pour $x = c_1 = k\pi$, $c_2 = (k+1)\pi$, ..., $c_p = (k+p-1)\pi$, multiples de π compris entre a et b; on aura

$$\text{(A)} \qquad V = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{g_1} + \int_{g_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_p}^{b},$$

g_1, g_2, ... désignant des nombres quelconques séparant c_1, c_2, ...; d'après ce que l'on vient de dire, on aura

$$\text{(B)} \qquad V = \frac{\pi}{2}[f(c_1) + f(c_1) + f(c_2) + f(c_2) + \ldots]$$

ou

$$V = \pi[f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_p)].$$

Si a et b étaient eux-mêmes multiples de π, il faudrait ajouter $\frac{\pi}{2}f(a)$ et $\frac{\pi}{2}f(b)$.

Une remarque en terminant : Si la fonction $f(x)$ était discontinue pour $x = c_1, c_2, \ldots$ et qu'elle passât brusquement de la valeur $f_1(c_1)$ à la valeur $f_2(c_1)$ quand x franchit la valeur c_1, la formule (A), au lieu de donner la formule (B), donnerait celle-ci

$$V = \frac{\pi}{2}\left[f_1(c_1) + f_2(c_1) + f_1(c_2) + f_2(c_2) + \ldots\right],$$

de sorte que l'on peut écrire, en tous cas,

$$V = \frac{\pi}{2}\left[\varepsilon f_2(a) + f_1(c_1) + f_2(c_1) + f_1(c_2) + f_2(c_2) + \ldots + \varepsilon' f_1(b)\right],$$

en convenant que $\varepsilon = 0$ si a n'est pas multiple de π et égal à 1 s'il est multiple de π, et que $f_1(c) = f_2(c) = f(c)$ si $f(x)$ est continue pour $x = c$; ε' se définit d'une manière analogue à celle qui a servi à définir ε.

Disons enfin que nos conclusions s'appliqueraient encore au cas où la fonction f serait imaginaire et de la forme

$$\varphi + \psi\sqrt{-1};$$

en effet, on aurait

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \varphi \frac{\sin \omega x}{\sin x}\,dx + \sqrt{-1}\int_a^b \psi \frac{\sin \omega x}{\sin x}\,dx \\ &= \pi \sum \varphi(c) + \pi\sqrt{-1}\sum \psi(c) \\ &= \pi \sum f(c), \end{aligned}$$

comme tout à l'heure.

Pour faire une application des formules précédentes, observons que l'on a (p. 260)

$$\int_0^\infty \cos 2mx\, e^{-\alpha^2 x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\, e^{-\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2};$$

faisons successivement $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons les résultats : nous aurons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2nx\right) e^{-\alpha^2 x^2}\, dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left[\frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2} + \ldots + e^{-\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2}\right].$$

Le premier membre de cette formule est égal à

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x}\, e^{-\alpha^2 x^2}\, dx,$$

et, pour $n = \infty$, il est égal à

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} + e^{-(\pi\alpha)^2} + e^{-(2\pi\alpha)^2} + \ldots\right];$$

on a donc

$$\pi\left[\frac{1}{2} + e^{-(\alpha\pi)^2} + e^{-(2\alpha\pi)^2} + \ldots\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\left[\frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2} + \ldots\right];$$

en faisant $\alpha\pi = a$, $\frac{1}{\alpha} = b$, les nombres a et b seront liés entre eux par la relation

$$ab = \pi.$$

On aura

$$\sqrt{a}\left(\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \ldots\right) = \sqrt{b}\left(\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + \ldots\right),$$

formule remarquable due à Cauchy; si l'on y suppose $a = dx$ et très petit, on retombera sur la formule connue

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

IV. — Séries trigonométriques. Méthode de Dirichlet.

Lorsque, dans une fonction, on remplace la variable z par $r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta$, son développement par la formule de Taylor se change en un développement ordonné suivant les

cosinus et les sinus des multiples de l'arc θ; il en résulte qu'un grand nombre de fonctions se développent ainsi.

Supposons qu'une fonction $f(x)$ soit développable sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots; \end{aligned}\right.$$

on pourra facilement calculer les coefficients $a_0, a_1, \ldots, b_1, \ldots$, comme il suit : observant que l'on a

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \cos mx \cos nx \, dx = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } m \gtrless n \\ \pi \text{ si } m = n \end{array}\right.,$$

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \qquad \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \cos mx \, dx = 0.$$

Si l'on multiplie les deux membres de (1) par $\cos nx\,dx$ et si l'on intègre de α à $\alpha + 2\pi$, on trouve

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n,$$

d'où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\xi) \, d\xi.$$

et l'on aurait de même

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\xi) \sin n\xi \, d\xi.$$

Portant ces valeurs dans (1) on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \cos nx \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos n\xi\, f(\xi)\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \sin nx \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sin n\xi\, f(\xi)\, d\xi.$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$(2)\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(\xi)\cos n(\xi-x)\,d\xi.$$

Mais cette formule ne peut être considérée comme démontrée que si l'on sait *a priori* que le développement (1) est *possible* et *uniformément convergent*.

Par exemple, on sait que, pour m entier, on a

$$\cos^m x=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mx-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-2)x+\ldots\right];$$

on en conclut

$$\int_0^{2\pi}\cos^m x\cos mx\,dx=\frac{1}{2^{m-1}},\quad \ldots.$$

Mais il est intéressant de se demander à quelles conditions la formule (2) a lieu. Pour répondre à cette question, posons

$$(3)\qquad V_n=\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\xi)\,d\xi+\sum_1^n\frac{1}{\pi}\int_a^b f(\xi)\cos n(\xi-x)\,d\xi.$$

Si l'on observe que

$$\frac{1}{2}+\cos(\xi-x)+\cos 2(\xi-x)+\ldots+\cos n(\xi-x)=\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\xi-x}{2}}{2\sin\dfrac{1}{2}(\xi-x)},$$

la formule (3) donnera

$$V_n=\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\xi)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\xi-x}{2}}{\sin\dfrac{\xi-x}{2}}\,d\xi.$$

Posons

$$\frac{\xi-x}{2}=t,\qquad \xi=x+2t,\qquad d\xi=2\,dt,$$

nous aurons

$$V_n=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a-x}{2}}^{\frac{b-x}{2}}f(x+2t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

D'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, V_x sera égal à zéro si, entre $\frac{a-x}{2}$ et $\frac{b-x}{2}$, $\sin t$ ne s' annule pas, et si l'on appelle $k\pi$, $(k+1)\pi$, ..., $(k+m)\pi$ les multiples de π compris entre $\frac{a-x}{2}$ et $\frac{b-x}{2}$, on aura

$$V_\infty = F(k\pi) + F[(k+1)\pi] + \ldots + F[(k+m)\pi],$$

où $F(t)$ représente $f(x+2t)$.

En particulier, si entre $\frac{a-x}{2}$ et $\frac{b-x}{2}$ se trouve le seul multiple o de π, en d'autres termes si l'on a

$$\frac{a-x}{2} < 0 < \frac{b-x}{2}$$

ou $a < x < b$, on aura $V_\infty = F(0) = f(x)$. La formule (3) donne alors

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_a^b f(\xi)\cos n(\xi - x)\,d\xi,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, pourvu que, entre $\frac{a-x}{2}$ et $\frac{b-x}{2}$, il n'y ait pas de multiple de π autre que o, ce dont on sera assuré si $\frac{a-x}{2} - \frac{b-x}{2}$ est tout au plus égal à π, ou si $a - b$ est tout au plus égal à 2π. Ceci démontre la formule (2) et en fixe le sens, en même temps que les limites entre lesquelles elle est vraie. D'ailleurs cette formule (2) ne pouvait être vraie d'une façon absolue, le second membre représentant une fonction nécessairement périodique et de période 2π.

Lorsque x n'est pas compris entre a et b, la formule (4) cesse d'avoir lieu et le second membre est nul, à moins que $\frac{a-x}{2}$ et $\frac{b-x}{2}$ ne comprennent un multiple de π. D'ailleurs on voit que le second membre est périodique et a pour période 2π. Si $x = a$, le second membre n'est plus égal à $f(a)$, mais à $\frac{1}{2}f(a)$, etc.

On donne parfois à la formule (4) une forme plus commode dans les applications. Si l'on y fait $a = -\pi$, $b = \pi$, on a, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos n(\xi - x)\,d\xi$$

ou même

$$(5)\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos n(\xi - x)\,d\xi.$$

Posons alors

$$\xi = \lambda\tau + \mu,$$

et déterminons λ et μ de telle sorte que, pour $\xi = -\pi$, on ait $\tau = a$, et, pour $\xi = \pi$, $\tau = b$, on trouvera

$$-\pi = \lambda a + \mu, \qquad \pi = \lambda b + \mu,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2\pi}{b-a}, \qquad \mu = -\frac{\pi(a+b)}{b-a};$$

nous aurons

$$\xi = \frac{2\tau - a - b}{b-a}\pi, \qquad d\xi = \frac{2\pi}{b-a}\,d\tau.$$

Posons aussi

$$x = \frac{2t - a - b}{b-a}\pi$$

la formule (5) donnera

$$f\left(\frac{2t-a-b}{b-a}\pi\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f\left(\frac{2\tau-a-b}{b-a}\pi\right)\cos 2n\pi\frac{\tau - t}{b-a}\,d\tau,$$

et cette nouvelle formule aura lieu pour toutes les valeurs de t satisfaisant à la relation

$$\pi > \frac{2t-a-b}{b-a}\pi > -\pi$$

ou

$$b > t > a.$$

Faisons enfin

$$f\left(\frac{2t - a - b}{a - b}\pi\right) = \mathrm{F}(t);$$

nous aurons finalement, pour toutes les valeurs de t comprises entre a et b,

$$(6) \qquad \mathrm{F}(t) = \frac{1}{b - a}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_a^b \mathrm{F}(\tau)\cos 2\pi n\,\frac{\tau - t}{b - a}\,d\tau.$$

Dans cette formule, on peut aussi remplacer le cosinus par l'exponentielle $e^{2\pi n\sqrt{-1}\,\frac{\tau - t}{b-a}}$.

Nous écrirons le plus souvent la formule (6) ainsi, en changeant t en x pour la commodité des applications,

$$(7) \quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(x) = {} & \frac{1}{b - a}\int_a^b \mathrm{F}(\tau)\,d\tau \\ & + \frac{2}{b - a}\sum_1^{\infty}\cos 2\pi n\,\frac{x}{b - a}\int_a^b \mathrm{F}(\tau)\cos 2n\pi\,\frac{\tau}{b - a}\,d\tau \\ & + \frac{2}{b - a}\sum_1^{\infty}\sin 2\pi n\,\frac{x}{b - a}\int_a^b \mathrm{F}(\tau)\sin 2n\pi\,\frac{\tau}{b - a}\,d\tau; \end{aligned}\right.$$

en faisant $a = -\pi$, $b = \pi$, on a

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(x) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(\tau)\cos n\tau\,d\tau \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(\tau)\sin n\tau\,d\tau. \end{aligned}\right.$$

V. — Quelques applications.

Problème I. — *Trouver une fonction égale à x quand x varie de $-\pi$ à $+\pi$, et périodique.*

Nous appliquerons la formule (8) du paragraphe précédent, et, comme l'on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \tau \cos n\tau\, d\tau = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \tau \sin n\tau\, d\tau = (-1)^n \frac{2\pi}{n},$$

on en conclura, pour $F(x) = x$,

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots \mp \frac{1}{n}\sin nx \pm \ldots,$$

et cette formule a lieu entre les limites $-\pi$ et $+\pi$; elle est fausse pour $x = \pm\pi$; son premier membre pour ces valeurs est $\frac{1}{2}(\pi - \pi)$ ou zéro. Si l'on y change x en $\pi - x$, on obtiendra la formule

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots,$$

vraie entre les limites 0 et 2π, et que l'on aurait pu déduire de (3) en prenant les limites 0 et 2π pour les intégrales et en faisant $F(x) = x$.

Problème II. — *Développer en série trigonométrique* $\sin mx$ et $\cos mx$.

Faisant toujours usage de la formule (8), on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{n \sin m\pi}{n^2 - m^2}(-1)^{m+1},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0;$$

donc

$$\sin mx = \frac{2}{\pi}\sin m\pi \left[\frac{\sin x}{1 - m^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 - m^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 - m^2} - \ldots\right];$$

de même

$$\cos mx = \frac{2}{\pi}\sin m\pi \left[\frac{1}{2m} + \frac{m\cos x}{1^2 - m^2} - \frac{m\cos 2x}{2^2 - m^2} + \frac{m\cos 3x}{3^2 - m^2} - \ldots\right].$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $x = 0$, on a

$$\cos m\pi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2m} + \frac{m}{1^2 - m^2} - \frac{m}{2^2 - m^2} + \ldots\right].$$

Problème III. — *Développer en série trigonométrique le cosinus et le sinus hyperboliques de mx.*

On trouve toujours, par la formule (8) du paragraphe précédent,

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} = \frac{\sin x}{1^2 + m^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 + m^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 + m^2} \quad \ldots,$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} = \frac{1}{2m} - \frac{m\cos x}{1^2 + m^2} + \frac{m\cos 2x}{2^2 + m^2} - \ldots;$$

si l'on fait dans cette dernière $x = \pi$, on a

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{m\pi} + e^{-m\pi}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} = \frac{1}{2m} + \frac{m}{1^2 + m^2} + \frac{m}{2^2 + m^2} + \ldots.$$

De ces formules, il est facile, par addition et soustraction, de déduire le développement de e^{mx}.

Voici quelques exemples tirés du Traité de Fourier sur la chaleur : En appliquant la formule (6), on trouve que

$$\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} + \ldots$$

est égal à $\frac{\pi}{4}$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et l et égal à $-\frac{\pi}{4}$ pour des valeurs de x comprises entre 0 et $-l$; dans ce cas

$$\int_a^b F(\tau)\cos\frac{2n\pi\tau}{b-a}\,d\tau = -\int_{-l}^{0}\frac{\pi}{4}\cos\frac{n\pi\tau}{l}\,dt + \int_0^l \frac{\pi}{4}\cos\frac{n\pi\tau}{l}\,d\tau = 0,$$

$$\int_a^b F(\tau)\sin\frac{2n\pi\tau}{b-a}\,d\tau = -\int_{l}^{0}\frac{\pi}{4}\sin\frac{n\pi\tau}{l}\,d\tau + \int_0^l \frac{\pi}{4}\sin\frac{n\pi\tau}{l}\,d\tau$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^l \sin\frac{n\pi\tau}{l}\,d\tau.$$

On trouve aussi que l'ordonnée d'un trapèze isoscèle, dont la grande base serait π et dont l'équation de l'ensemble des côtés serait

$$\begin{aligned} y &= x && \text{depuis } x = 0 && \text{jusqu'à } x = \alpha, \\ y &= \alpha && \text{depuis } x = \alpha && \text{jusqu'à } x = \pi - \alpha, \\ y &= \pi - x && \text{depuis } x = \pi - \alpha && \text{jusqu'à } x = \pi, \end{aligned}$$

est égale à la valeur de la série

$$y = \frac{4}{\pi}\left[\sin\alpha\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5x + \ldots\right],$$

et l'on trouverait d'une façon analogue l'équation d'un contour quelconque, formé de portions de lignes dont on possède l'équation.

VI. — Méthode de Cauchy.

Considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(\xi)\, e^{z(\xi - x)\sqrt{-1}}\, d\xi,$$

dans laquelle a et b sont des nombres finis réels et où $f(\xi)$ désigne une fonction finie qui n'est assujettie à d'autre condition qu'à rendre finie et déterminée l'intégrale précédente pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z, et pour les valeurs réelles de x. Cette intégrale est une fonction monodrome et monogène de z, si l'on suppose l'intégrale

$$\int_a^b f(\xi)(\xi - x)\sqrt{-1}\, e^{z(\xi - x)\sqrt{-1}}\, d\xi$$

finie et bien déterminée, car elle se trouve dans des conditions telles que l'on pourra lui appliquer les règles de la différentiation sous le signe $\int$. Supposons qu'il en soit ainsi; consi-

dérons l'intégrale suivante prise le long d'un cercle de rayon infini décrit de l'origine comme centre

$$(1)\qquad \int \frac{\int_a^b f(\xi)\, e^{z(\xi - x)\sqrt{-1}}\, d\xi}{e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1}\, dz,$$

et cherchons à calculer sa valeur.

1° Supposons d'abord $a = x$ et $b - a < 2\pi$; le long de la portion de contour d'intégration pour laquelle le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans z est négatif, l'intégrale est nulle; on peut donc supposer que cette intégrale est prise seulement le long d'un demi-cercle de rayon infini et égal à r décrit au-dessus de l'axe des x; elle prend alors, au signe près, la forme

$$\int\int_x^b f(\xi)\, e^{z(\xi - x)\sqrt{-1}}\, d\xi\, dz.$$

On peut poser $\xi = x + \mu$ et $z = r\zeta$; on a alors, au lieu de l'intégrale précédente, en désignant $b - a$ ou $b - x$ par ε,

$$\int\int_0^\varepsilon f(x + \mu)\, e^{r\zeta\mu\sqrt{-1}}\, r\, d\mu\, d\zeta$$

le contour d'intégration étant un demi-cercle de rayon égal à un, ou, en remplaçant μ par $\frac{\nu}{r}$,

$$\int\int_0^{r\varepsilon} f\left(x + \frac{\nu}{r}\right) e^{\nu\zeta\sqrt{-1}}\, d\nu\, d\zeta.$$

Nous décomposerons cette intégrale en deux autres

$$\int\int_0^{\varepsilon\sqrt{r}} f\left(x + \frac{\nu}{r}\right) e^{\nu\zeta\sqrt{-1}}\, d\nu\, d\zeta \quad \text{et} \quad \int\int_{\varepsilon\sqrt{r}}^{\varepsilon r} \cdots;$$

la seconde est nulle et il reste à trouver la limite de

$$\int\int_0^{\varepsilon\sqrt{r}} f\left(x + \frac{\nu}{r}\right) e^{\nu\zeta\sqrt{-1}}\, d\nu\, d\zeta$$

pour $r = \infty$. A cet effet, nous supposerons que $f(x + \omega)$

tende vers $f(x)$ quand ω tend vers zéro, en passant par des valeurs positives, de sorte que notre intégrale se décomposera en

$$f(x)\int\int_0^{\varepsilon\sqrt{r}} e^{\nu\zeta\sqrt{-1}}\,d\nu\,d\zeta \quad \text{et} \quad \int\int_0^{\varepsilon\sqrt{r}} \mathrm{E}\,e^{\nu\zeta\sqrt{-1}}\,d\nu\,d\zeta,$$

E désignant une quantité qui s'annule pour $r = \infty$.

Or $\int\int_0^{\varepsilon\sqrt{r}} e^{\nu\zeta\sqrt{-1}}\,d\nu\,d\zeta$ est égal à l'intégrale

$$\sqrt{-1}\int\frac{d\zeta}{\zeta}$$

prise le long d'un demi-cercle de rayon un, c'est-à-dire à $-\pi$. La première de nos deux expressions est donc égale à $\pi f(x)$ et la seconde à zéro : la valeur de l'intégrale (1) est donc $\pi f(x)$.

2° Si nous supposons $x = b$, on verra de même que la valeur de l'intégrale (1) est encore $\pi f(x)$, mais en appelant cette fois $f(x)$ la limite vers laquelle tend $f(x - \omega)$ quand ω tend vers zéro en passant par des valeurs exclusivement positives.

3° Si nous supposons x compris entre a et b et si nous désignons par f_1, la valeur vers laquelle converge $f(x + \omega)$ quand ω tend vers zéro en passant par des valeurs positives, et par f_2 la valeur vers laquelle il converge en passant par des valeurs négatives, on pourra décomposer l'intégrale (1) en deux autres prises par rapport à ξ de a à x et de x à b. Nous savons que ces intégrales partielles ont pour valeurs πf_2 et πf_1 ; l'intégrale (1) aura donc dans ce cas pour valeur

$$\pi(f_1 + f_2),$$

valeur qui se réduit à $2\pi f(x)$, quand $f_1 = f_2$, c'est-à-dire quand $f(x)$ est continu.

Nous avons supposé $a - b < 2\pi$; mais on pourrait supposer $a - b = \pi$, et, si x était compris entre a et b, il est clair que l'intégrale (1) serait encore égale à $\pi(f_1 + f_2)$.

4° Enfin, supposons x en dehors des limites a et b, mais tel que sa différence avec chacune de ces quantités soit

moindre que 2π, il est clair que l'intégrale (1) sera la différence de deux autres égales entre elles; par suite, elle sera nulle.

Mais l'intégrale (1) peut se développer en série : elle est égale en effet à la somme des résidus de

$$\frac{\int_a^b f(\xi)\, e^{z(\xi-x)\sqrt{-1}}\, d\xi}{e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1},$$

relatifs aux zéros $e^{2\pi z\sqrt{-1}} - 1$, multipliés par $2\pi\sqrt{-1}$, zéros qui sont $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; l'intégrale (1) est donc égale à

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi + \int_a^b f(\xi)\, e^{(\xi-x)\sqrt{-1}}\, d\xi + \int_a^b f(\xi)\, e^{-(\xi-x)\sqrt{-1}}\, d\xi + \ldots,$$

et, par suite, on a

$$\pi(f_1 + f_2) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_a^b f(\xi)\, e^{n(\xi-x)\sqrt{-1}}\, d\xi.$$

Cette formule suppose $a - b < \pi$ et x compris entre a et b; faisons $b = a + 2\pi$: nous aurons, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a + 2\pi$,

$$\pi(f_1 + f_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_a^{a+2\pi} f(\xi)\, e^{n(\xi-x)\sqrt{-1}}\, d\xi.$$

C'est la formule de Fourier. Comme le second membre est périodique, il est facile de voir quelle est sa valeur quand x n'est pas compris entre a et $a + 2\pi$. Il reste à voir ce que cette formule devient pour $x = a$; or le second membre peut s'écrire

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_a^{a+\pi} f(\xi)\, e^{n(\xi-x)\sqrt{-1}}\, d\xi + \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(\xi)\, e^{n(\xi-x)\sqrt{-1}}\, d\xi;$$

si l'on fait $x = a$, la première série est $\pi f(a)$, la seconde est $\pi f(a + 2\pi)$, car on obtient le même résultat qu'en y faisant

$x = a + 2\pi$. La formule de Fourier est donc démontrée, même pour $x = a$.

Nous avons cru devoir donner la démonstration de Cauchy que l'on vient de lire, pour deux raisons : d'abord à cause de sa simplicité et de sa généralité, et ensuite parce que Riemann a parlé fort légèrement des travaux de Cauchy sur la formule de Fourier, et que personne jusqu'ici n'a cru devoir protester contre le jugement de ce géomètre allemand.

(*Voir*, dans les Œuvres de Riemann, son Mémoire sur la série de Fourier, traduit en français dans le *Bulletin* de M. Darboux; 1873.)

VII. — Formule de Fourier, ses applications à la recherche des intégrales définies.

Reprenons la formule

$$F(t) = \frac{1}{b-a}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_a^b F(\tau)\cos 2\pi n\,\frac{\tau - t}{b-a}\,d\tau,$$

qui suppose t compris entre a et b; b et a étant quelconques, on peut supposer $b = +\infty$, $a = -\infty$; en faisant alors

$$\frac{2\pi}{b-a} = d\psi, \qquad \frac{2\pi n}{b-a} = \psi,$$

la somme $\sum$ se changera en une intégrale définie, et l'on aura

$$(1) \qquad F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\cos\psi(\tau - t)\,d\tau.$$

C'est la formule de Fourier. Nous allons en faire des applications. Observons encore, auparavant, que la formule (1) ne suppose en aucune façon $F(t)$ continue; $F(t)$ ne doit pas être infinie et ne doit pas être *toujours* discontinue. Quand $F(t)$ a deux valeurs pour $t = \theta$, on doit supposer $F(\theta)$ remplacé par $F_1(\theta) + F_2(\theta)$, comme il a été expliqué plus haut. En outre, $F(t)$ doit satisfaire à certaines conditions d'inté-

grabilité, qui sont satisfaites en particulier si elle n'a pas dans un intervalle fini une infinité de maxima et de minima. Enfin l'ordre des intégrations ne doit pas être interverti.

Supposons $F(t) = 1$ quand t varie de $-a$ à $+a$ et égal à zéro en dehors de ces limites : alors on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\cos\psi(\tau - t)\,d\tau = \int_{-a}^{+a} \cos\psi(\tau - t)\,d\tau$$

ou bien

$$= \frac{1}{\psi}\left[\sin\psi(a - t) + \sin\psi(a + t)\right]$$

$$= \frac{2}{\psi}\sin a\psi\cos t\psi.$$

On a donc, en supposant $a > t > -a$,

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin a\psi\cos t\psi}{\psi}\,d\psi.$$

En dehors de ces limites, l'intégrale est nulle, et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\psi\cos t\psi}{\psi}\,d\psi = \begin{cases} \pi \text{ pour } t^2 < a^2, \\ 0 \text{ pour } t^2 > a^2. \end{cases}$$

Si l'on fait $t = 0$, on retrouve la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\psi}{\psi}\,d\psi = \pi.$$

Si l'on se propose de trouver une fonction égale à e^{-t} entre les limites 0 et ∞ de t et égale à e^{t} pour les valeurs de t comprises entre 0 et $-\infty$, on trouvera

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\cos\psi(\tau - t)\,d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\cos\psi(\tau - t)\,d\tau\right]$$

et, par suite,

$$y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\psi t\,d\psi}{1 + \psi^2},$$

ce que l'on savait déjà.

VIII. — Généralisation des formules précédentes.

Reprenons la formule

$$(1)\qquad F(x) = \frac{1}{b-a}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_a^b F(\xi)\cos 2n\pi(\xi - x)\,d\xi.$$

Si l'on y remplace $F(x)$ par $F(x, y)$, on aura

$$F(x, y) = \frac{1}{b-a}\sum\int_a^b F(\xi, y)\cos 2n\pi(\xi - x)\,d\xi$$

et, en appliquant à $F(\xi, y)$ la formule (1),

$$F(x, y) = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{d-c}\sum\sum\int_a^b\int_c^d F(\xi, \eta)\cos 2n\pi(\xi - x)\cos 2\mu\pi(\eta - y)\,d\xi\,d\eta,$$

et ainsi de suite.

De même, si dans la formule

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} F(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\,d\lambda\,d\xi$$

on remplace $F(x)$ par $F(x, y)$, on aura

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} F(\xi, y)\cos\lambda(\xi - x)\,d\lambda\,d\xi$$

et

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty} F(\xi, \eta)\cos\lambda(\xi - x)\cos\mu(\eta - y)\,d\lambda\,d\xi\,d\mu\,d\eta,$$

on trouverait de même

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta)\cos\lambda(\xi - x)\cos\mu(\eta - y)$$
$$\times\cos\nu(\zeta - z)\,d\lambda\,d\xi\,d\mu\,d\eta\,d\nu\,d\zeta$$

ou, plus simplement, en posant

$$(\xi - x)\sqrt{-1} = X, \qquad (\eta - y)\sqrt{-1} = Y \qquad \text{et} \qquad (\zeta - z)\sqrt{-1} = Z,$$

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta)\, e^{\lambda X + \mu Y + \nu Z}\, d\lambda\, d\xi\, d\mu\, d\eta\, d\nu\, d\zeta.$$

Nous ferons, au sujet de cette dernière formule, une remarque importante. Je suppose que les intégrations relatives à ξ, η, ζ soient faites en prenant pour limites celles d'un corps solide donné, une sphère pour fixer les idées. Négliger le reste de l'intégrale, c'est supposer $f(x, y, z)$ nul en dehors de ces limites.

Ainsi, le second membre de l'équation précédente représente la fonction $F(x, y, z)$ pour tous les points x, y, z intérieurs à une sphère et est égal à zéro pour tous les autres points de l'espace. On comprend toute l'importance de cette formule dans les applications à la Physique mathématique.

Si l'on veut, par exemple, représenter la densité d'une sphère en fonction des coordonnées et ses divers points, on sera en présence d'une fonction nulle pour les points extérieurs à la sphère, et égale à une fonction donnée pour tous les points intérieurs. Voici d'ailleurs d'autres applications du même principe.

IX. — Théorie des restricteurs, méthode d'intégration de Dirichlet.

Dirichlet a inventé une méthode d'intégration qu'il a appliquée à une question importante de Mécanique (attraction des ellipsoïdes) et dont Cauchy a montré toute l'importance pour le Calcul des probabilités.

On appelle, d'après Cauchy, *restricteur* une expression égale à l'unité entre certaines limites données et nulle en dehors de ces limites.

$$\frac{x - x_0 + \sqrt{(x - x_0)^2}}{2(x - x_0)}$$

est un restricteur égal à un pour $x > x_0$ et égal à zéro en dehors de ces limites. Mais les restricteurs les plus utiles sont ceux qui résultent de la formule de Fourier.

Ainsi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx + \frac{1}{2}$$

est égal à l'unité si $\alpha > 0$; dans le cas contraire, il est égal à zéro.

$$\frac{2e^b}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\,dx = \text{A}$$

est égal à un si b est positif et à e^{+2b} si b est négatif; donc $(\text{A} - 1)e^{-2b}$ est nul pour $b > 0$ et égal à un pour $b < 0$.

Mais le restricteur le plus utile dans les applications est

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\psi(x-\alpha)\sqrt{-1}}\,\frac{\sin\psi l}{\psi}\,d\psi,$$

égal à un si

$$\alpha - l < x < \alpha + l,$$

et à zéro en dehors de ces limites. Pour trouver ce restricteur, on peut partir de la formule de Fourier et se proposer de trouver une fonction de x égale à un pour $a < x < b$, et égale à zéro en dehors de ces limites.

Cette fonction est

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \int_a^b \cos\psi(\tau - x)\,d\tau$$

ou

$$(1) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\psi\,\dfrac{b-a}{2}\cos\psi\left(\dfrac{a+b}{2} - x\right)}{\psi}\,d\psi,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{b-a}{2}\psi}{\psi}\,e^{\pm\psi\sqrt{-1}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)}\,d\psi;$$

si l'on fait $a = \alpha - l$ et $b = \alpha + l$, on trouve précisément

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\psi l}{\psi}\,e^{\psi\sqrt{-1}(x-\alpha)}\,d\psi.$$

Je suppose maintenant que l'on veuille intégrer la fonction $F(x, y, z)$ pour toutes les valeurs de x, y, z comprises à l'intérieur d'un solide donné; on pourra multiplier cette fonction par un restricteur, nul en dehors des limites du corps donné, et alors on pourra, sans inconvénient, intégrer le résultat entre des limites infinies, ce qui facilitera le plus souvent le calcul.

Soit à évaluer l'intégrale

$$\iiint e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz,$$

pour tous les points, tels que l'on ait

$$x+y+z<1, \qquad x>0, \qquad y>0, \qquad z>0;$$

nous multiplierons par le restricteur

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,e^{\varphi\sqrt{-1}(x+y+z)}\,d\varphi,$$

égal à 1 quand $x+y+z<1$, et nul pour les valeurs positives comprises en dehors de ces limites, et nous considérerons l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,e^{\varphi\sqrt{-1}(x+y+z)}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi\,dx\,dy\,dz:$$

nous ne faisons ainsi qu'ajouter des élément nuls à l'intégrale. Or on a (p. 260)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,e^{\varphi\sqrt{-1}x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{\varphi^2}{4}};$$

l'intégrale proposée devient alors

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,e^{-\frac{3\varphi^2}{4}}\,d\varphi$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{\pi}}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}e^{-\frac{3\varphi^2}{4}}d\varphi,$$

et se trouve remplacée par une intégrale définie simple prise entre des limites $-\infty$ et $+\infty$.

X. — Théorème de Parseval.

Le théorème de Parseval permet de calculer la valeur de la série

$$(1)\qquad a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + \ldots,$$

quand on connaît celles des séries

$$(2)\qquad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

$$(3)\qquad \psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots.$$

On a en effet, en prenant les résidus pour $x = 0$,

$$\mathcal{E}\,\frac{1}{x}\varphi(x)\psi\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots;$$

si l'on intègre le long d'un cercle de rayon un, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(e^{\theta\sqrt{-1}}\right)\psi\left(e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)d\theta = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots;$$

mais, pour que cette formule soit admissible, il est nécessaire que les seconds membres des formules (3) soient convergents à l'intérieur d'un cercle de rayon un peu plus grand que un, ayant son centre à l'origine.

Si l'on avait

$$\varphi(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \ldots,$$
$$\psi(\theta) = b_0 + b_1\cos\theta + b_2\cos 2\theta + \ldots,$$

on en déduirait aussi, en supposant ces séries uniformément convergentes,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\psi(\theta)d\theta = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots.$$

Nous aurons souvent l'occasion d'appliquer le théorème de Parseval.

XI. — Formule de Cauchy.

Si, dans la formule de Fourier,

$$f(x, y \ldots) = \int\int \ldots e^{[\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) \ldots]\sqrt{-1}} f(\xi, \eta, \ldots) \frac{d\xi\, d\alpha}{2\pi} \frac{d\eta\, d\beta}{2\pi} \ldots,$$

où les limites sont $-\infty$ et $+\infty$ pour α, β, ..., quelconques pour ξ, η, ..., mais comprenant x, y, ..., et qui n'a lieu que pour les valeurs de x comprises entre les limites de ξ, ..., on pose $x = 0$, $y = 0$, ..., on a

$$f(0, 0, \ldots) = \int\int \ldots e^{(\alpha\xi + \beta\eta + \ldots)\sqrt{-1}} f(\xi, \eta, \ldots) \frac{d\xi\, d\alpha}{2\pi} \frac{d\eta\, d\beta}{2\pi} \ldots.$$

Supposons maintenant

$$\xi = L(\lambda, \mu, \ldots), \qquad \eta = M(\lambda, \mu, \ldots), \qquad \ldots,$$

nous aurons (p. 151)

$$(1) \quad \begin{cases} f(0, 0, \ldots) \\ \quad = \int\int \ldots e^{(\alpha L + \beta M + \ldots)\sqrt{-1}} f(L, M, \ldots) \dfrac{\partial(L, M, \ldots)}{\partial(\lambda, \mu, \ldots)} \dfrac{d\lambda\, d\alpha}{2\pi} \ldots; \end{cases}$$

supposons encore que λ_0, μ_0, ... soient une solution du système

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad \ldots.$$

On peut supposer

$$f(L, M, \ldots) = \varphi(\lambda, \mu, \ldots);$$

mais alors

$$f(0, 0, \ldots) = \varphi(\lambda_0, \mu_0, \ldots)$$

et (1) devient

$$\varphi(\lambda_0, \mu_0 \ldots) = \int\int \ldots e^{(\alpha L + \beta M + \ldots)\sqrt{-1}} \varphi(\lambda, \mu, \ldots) \frac{\partial(L, M, \ldots)}{\partial(\lambda, \mu, \ldots)} \frac{d\lambda\, d\alpha}{2\pi} \ldots.$$

Les limites de la nouvelle intégrale seront $-\infty$ et $+\infty$ pour les variables α, β, ... ; un peu supérieures et un peu inférieures à λ_0 pour la variable λ, un peu supérieures et un peu

inférieures à μ_0 pour la variable μ, etc.; et, si l'on veut, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \varphi(\lambda'_0, \mu'_0, \ldots) \\ &\quad = \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha+\infty}\int \ldots \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2}\int_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_2} \ldots e^{(\alpha L+\beta M+\ldots)\sqrt{-1}}\varphi(\lambda, \mu, \ldots) \\ &\quad\quad \times \frac{\partial(L, M, \ldots)}{\partial(\lambda, \mu, \ldots)} \frac{d\alpha\, d\lambda}{2\pi} \frac{d\beta\, d\mu}{2\pi} \ldots, \end{aligned}\right.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les solutions de

$$L = 0, \quad M = 0, \quad \ldots$$

λ'_0, μ'_0, ... telles que l'on ait

$$\begin{aligned} &\lambda_1 < \lambda'_0, \lambda''_0, \ldots < \lambda_2, \\ &\mu_1 < \mu'_0, \mu''_0, \ldots < \mu_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cette formule (2) a été donnée par Cauchy dans le XIX[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* il en a fait une application importante (Mémoire présenté à l'Institut le 26 mai 1823).

Il est clair qu'une méthode semblable à celle que nous venons de suivre nous permettrait également de développer en série trigonométrique une fonction des solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, ... On trouve ainsi

$$\begin{aligned} &\sum \varphi(\lambda'_0, \mu'_0, \ldots) \\ &\quad = \sum \int\int \ldots e^{(lL+mM+\ldots)}\varphi(\lambda, \mu, \ldots) \frac{\partial(L, M, \ldots)}{\partial(\lambda, \mu, \ldots)} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2\pi} \ldots, \end{aligned}$$

l, m, ... désignant des entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Malheureusement, ces développements sont peu convergents.

XII. — Étude d'une fonction singulière considérée par Weierstrass.

Soient b un nombre moindre que un et positif, a un entier impair; la fonction $f(x)$, définie par la relation

$$f(x) = \cos\pi x + b\cos a\pi x + \ldots + b^n \cos a^n \pi x + \ldots,$$

est continue, car le second membre de cette équation est uniformément convergent. Nous allons reproduire un raisonnement de Weierstrass en vertu duquel $f(x)$ n'a pas de dérivée; nous transcrivons ici la traduction textuelle de sa démonstration donnée page 30, Tome 79 du *Journal de Crelle*.

« Soient x_0 une valeur particulière de x et m un entier positif; il y aura un entier α_m satisfaisant aux inégalités

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \leq \frac{1}{2},$$

de sorte que, si l'on pose $a^m x_0 - \alpha_m = x_{m+1}$ et

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \qquad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

on aura

$$(1) \qquad x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \qquad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m},$$

$$x' < x_0 < x'';$$

et l'on peut prendre m assez grand pour que x' et x'' diffèrent de x_0 d'aussi peu que l'on veut.

» Or on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} &= \sum_0^\infty b^n \frac{\cos a^n x'\pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0} \\
&= \sum_{n=0}^{n=m-1} a^n b^n \frac{\cos a^n x'\pi - \cos a^n x_0 \pi}{a^n (x' - x_0)} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{n=\infty} b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} x'\pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x' - x_0} \\
&= \sum_{n=0}^{n=m-1} - a^n b^n \pi \sin a^n \pi \frac{x' + x_0}{2} \, \frac{\sin a^n \pi \frac{x' - x_0}{2}}{a^n \pi \frac{x' - x_0}{2}} \\
&\quad + (-1)^{\alpha_m} a^m b^m \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1 + \cos a^n x_{m+1} \pi}{1 + x_{m+1}} b^n,
\end{aligned}$$

en vertu de (1) et de l'hypothèse que a est impair. Si l'on observe alors que $1 + x_{m+1}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, puisque x_{m+1} est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} a^m b^m \eta \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{ab - 1}\right),$$

η désignant un nombre supérieur à l'unité et ε un nombre compris entre -1 et $+1$. On aurait de même

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} a^m b^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{ab - 1}\right),$$

η_1 désignant un nombre supérieur à 1 et ε_1 un nombre compris entre -1 et $+1$. Si alors on choisit a de telle sorte que

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,$$

les quantités

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \quad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

seront de signes contraires et infinies pour $m = \infty$. »

La dérivée de $f(x)$ n'existerait donc pas, et cependant cette fonction serait continue. Ce fait est extraordinaire, et, bien que le raisonnement qui précède paraisse irréprochable, il est bon d'attendre qu'il soit bien connu et bien étudié avant d'en accepter les conséquences ([1]).

([1]) Ces lignes ont été écrites il y a plusieurs années, à une époque où beaucoup de géomètres refusaient d'admettre les conclusions précédentes, qui semblent généralement admises aujourd'hui.

EXERCICES ET NOTES.

Développements déduits de la formule de Fourier.

1. Entre les limites $-\pi$ et $+\pi$ de x (les limites exclues), on a

$$\sin mx = \frac{2}{\pi}\sin m\pi\left(\frac{\sin x}{1^2-m^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-m^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-m^2} - \ldots\right),$$

$$\cos mx = \frac{2}{\pi}\sin m\pi\left(\frac{1}{2m} + \frac{m\cos x}{1^2-m^2} - \frac{m\cos 2x}{2^2-m^2} + \frac{m\cos 3x}{3^2-m^2} - \ldots\right),$$

$$\frac{e^{mx}+e^{-mx}}{e^{m\pi}-e^{-m\pi}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2m} - \frac{m\cos x}{1^2+m^2} + \frac{m\cos 2x}{2^2+m^2} - \frac{m\cos 3x}{3^2+m^2} + \ldots\right),$$

$$\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{e^{m\pi}-e^{-m\pi}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2+m^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2+m^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2+m^2} - \ldots\right);$$

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots,$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots.$$

2. Pour x compris entre o et π, on a

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \sin\frac{3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots$$

$$\log\sin x = -\log 2 - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{3}\cos 6x - \ldots.$$

$$\frac{\pi(\pi-2x)}{8} = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots.$$

$$\frac{\pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2)}{96} = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^4} + \frac{\cos 5x}{5^4} + \ldots.$$

$$\frac{\pi x(\pi-x)}{8} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \ldots,$$

$$e^{mx} = +\frac{2m}{\pi}(e^{m\pi}-1)\left(\frac{1}{2m^2} + \frac{\cos 2x}{m^2+2^2} + \frac{\cos 4x}{m^2+4^2} + \ldots\right)$$
$$-\frac{2m}{\pi}(e^{m\pi}+1)\left(\frac{\cos x}{m^2+1^2} + \frac{\cos 3x}{m^2+3^2} + \ldots\right).$$

$$e^{mx} = +\frac{2}{\pi}(e^{m\pi}+1)\left(\frac{\sin x}{m^2+1} + \frac{3\sin 3x}{m^2+3^2} + \ldots\right)$$
$$-\frac{2}{\pi}(e^{m\pi}-1)\left(\frac{2\sin 2x}{m^2+2^2} + \frac{4\sin 4x}{m^2+4^2} + \ldots\right).$$

3. Entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on a, m étant entier,

$$\cos^{2m} x = 2\,\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\left[\frac{1}{2}+\frac{m}{m+1}\cos 2x + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 4x - \ldots\right],$$

$$\cos^{2m-1} x = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-1)}\left[\frac{1}{2}+\frac{2m-1}{2m+1}\cos 2x + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+1)(2m+3)}\cos 4x - \ldots\right].$$

En général, si l'on pose

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx,$$

on a

$$\cos^s x = \frac{1}{2^{s-1}}\,\frac{\Gamma(s+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right]^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{s}{s+2}\cos 2x + \frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)}\cos 4x + \ldots\right],$$

$$\cos^s x = \frac{1}{2^{s-2}}\,\frac{\Gamma(s+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\right]^2}\left[\frac{1}{s+1}\cos x + \frac{s-1}{(s+1)(s+3)}\cos 3x + \frac{(s-1)(s-3)}{(s+1)(s+3)(s+5)}\cos 5x + \ldots\right].$$

Si, dans ces formules, on fait $x=0$, on a des relations remarquables entre les fonctions $\Gamma(s)$.

(CAUCHY, *Anciens Exercices*.)

4. Entre les limites 0 et 2π, on a

$$\frac{\pi}{2}\cos x - \frac{x}{2}\cos x = \frac{1}{4}\sin x + \frac{2}{1.3}\sin 2x + \frac{3}{2.4}\sin 3x + \frac{4}{3.5}\sin 4x + \ldots,$$

$$\frac{\pi}{2}\sin x - \frac{x}{2}\sin x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{1.3}\cos 2x - \frac{1}{2.4}\cos 3x - \frac{1}{3.5}\cos 4x + \ldots,$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{x}{2} + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots,$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots.$$

5. Quel que soit x, on a (excepté pour $x = 0$ et $x = \pi$)

$$\frac{1}{2}\log 2\cos\frac{1}{2}x = \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\log 2\sin\frac{1}{2}x = -\cos x - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} - \ldots,$$

$$-1 < \rho < 1 \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1 - \rho\cos x}{1 - 2\rho\cos x + \rho^2} = 1 + \rho\cos x + \rho^2\cos 2x + \ldots, \\ &\frac{\rho\sin x}{1 - 2\rho\cos x + \rho^2} = \rho\sin x + \rho^2\sin 2x + \ldots. \end{aligned} \right.$$

$$\log\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2} = -r\cos\theta - \frac{r^2}{2}\cos 2\theta - \frac{r^3}{3}\cos 3\theta - \ldots,$$

$$\operatorname{arctang}\frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta} = r\sin\theta + \frac{r^2}{2}\sin 2\theta + \frac{r^3}{3}\sin 3\theta + \ldots;$$

mais ces formules supposent $r < 1$. En valeur absolue,

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{2r\sin\theta}{1 - r^2} = r\sin\theta + \frac{r^3}{3}\sin 3\theta + \frac{r^5}{5}\sin 5\theta + \ldots;$$

ici encore on suppose $r < 1$.

6. Dans le texte nous avons donné le développement de $f(x)$ en série trigonométrique en faisant sur la fonction f certaines restrictions qui ne sont pas absolument nécessaires, mais qui simplifient les démonstrations. On consultera avec fruit sur ce sujet les Ouvrages suivants : Riemann, sa thèse (1854) imprimée dans ses Œuvres. Le *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. V, reproduit la thèse de Riemann en français. — Le *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. III, Paul du Bois-Reymond. — Le *Bulletin des Sciences mathématiques,* O. Bonnet. (*Lettre à M. Darboux*). — Dini, *Serie di Fourier*, Pisa. (En vente chez Gauthier-Villars.)

CHAPITRE X.

SUR L'INTERPOLATION DES FONCTIONS NUMÉRIQUES.

I. — Préliminaires.

On appelle *fonctions numériques* les fonctions qui ne sont données que pour des valeurs entières de la variable ; ces fonctions se rencontrent surtout dans la théorie des nombres ; ainsi la fonction $\varphi(n)$ qui représente le nombre des entiers premiers et non supérieurs à n est une fonction numérique. Notre intention, dans ce Chapitre, n'est pas de traiter des fonctions numériques, mais bien de nous occuper de leur interpolation.

Interpoler, c'est, comme on sait, trouver une fonction qui prenne des valeurs données pour des valeurs également données de la variable. Interpoler une fonction numérique, ce sera trouver une fonction *continue*, autant que possible monodrome et monogène, égale à la fonction numérique pour toutes les valeurs entières de la variable.

La fonction $1+2+3+\ldots+x$, numérique, est interpolée par la fonction $\frac{x(x+1)}{2}$; la fonction numérique

$$1^2+2^2+\ldots+x^2$$

est interpolée par $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$, et ainsi de suite.

II. — Formule d'Euler.

Nous commencerons par démontrer une formule d'Euler, qui nous sera très utile dans la suite, et qui, d'ailleurs, est

susceptible de s'appliquer à l'évaluation approchée des intégrales définies.

Soit $f(x)$ une fonction continue entre les limites a et b de sa variable, possédant d'ailleurs des dérivées bien déterminées. On aura, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b (mais non pas pour $x=a$ et $x=b$) (p. 395),

$$(1) \qquad f(x)=\frac{1}{b-a}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_a^b f(\xi)\,e^{\frac{2n\pi}{b-a}(\xi-x)\sqrt{-1}}\,d\xi$$

et

$$(2) \qquad \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1}{b-a}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_a^b f(\xi)\,e^{\frac{2n\pi}{b-a}(\xi-a)\sqrt{-1}}\,d\xi.$$

Faisons dans la formule (1) $x=a+h$, $x=a+2h$, ... $x=a+(m-1)h$ et $h=\dfrac{b-a}{m}$; ajoutons les résultats avec (2), nous aurons

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\\ &\qquad +f(a+\overline{m-1}\,h)+\tfrac{1}{2}f(b)\\ &=\frac{1}{b-a}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_a^b f(\xi)\Big[1+e^{-\frac{2n\pi\sqrt{-1}}{m}}+e^{-\frac{4n\pi\sqrt{-1}}{m}}+\ldots\\ &\qquad\qquad +e^{-\frac{2(m-1)n\pi\sqrt{-1}}{m}}\Big]\,e^{\frac{2n\pi}{mh}(\xi-a)\sqrt{-1}}\,d\xi.\end{aligned}\right.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(4) \qquad \mathrm{T}=\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{m-1}\,h)+\tfrac{1}{2}f(b),$$

et nous observerons que, sous le signe $\int$, la quantité placée entre crochets est la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation binôme $z^m-1=0$; donc cette somme est nulle quand n n'est pas un multiple de m; elle est égale à m dans le cas contraire. Si l'on observe que $m=\dfrac{b-a}{h}$, la formule (3) pourra s'écrire

$$\mathrm{T}=\frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\int_a^b f(\xi)\,e^{\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\sqrt{-1}}\,d\xi$$

ou, en groupant les termes deux à deux,

$$(5)\qquad hT = \int_a^b f(\xi)\,d\xi + 2\sum_1^\infty \int_a^b f(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\,d\xi;$$

mais l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\,d\xi = \Big|_a^b \Big[& f(\xi)\sin\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^{-1} \\ & - f'(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^{-2} + \dots \\ & \pm f^{2p-1}(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^{-2p}\Big] \\ & \pm \int_a^b f^{2p}(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\,d\xi\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^{-2p},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\,d\xi &= [f'(b)-f'(a)]\frac{2h^2}{(2k\pi)^2} - [f'''(b)-f'''(a)]\frac{2h^4}{(2k\pi)^4} + \dots \\ &\pm 2\int_a^b f^{2p}(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\,d\xi\,\frac{h^{2p}}{(2k\pi)^{2p}};\end{aligned}$$

la formule (5) devient alors

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} hT = \int_a^b f(\xi)\,d\xi &+ 2\frac{h^2}{(2\pi)^2}[f'(b)-f'(a)]\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} \\ &- 2\frac{h^4}{(2\pi)^4}[f'''(b)-f'''(a)]\sum_1^\infty \frac{1}{k^4} + \dots \pm R,\end{aligned}\right.$$

R désignant un reste de la forme

$$R = 2\sum \int_a^b f^{2p}(\xi)\cos\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\,\frac{h^{2p}}{(2k\pi)^{2p}}\,d\xi$$

ou même de la forme

$$\mathrm{R} = 2\sum \int_a^b f^{2p+1}(\xi)\sin\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\frac{h^{2p+1}}{(2k\pi)^{2p+1}}\,d\xi.$$

Ce reste peut s'évaluer en observant que

$$\int_a^b f^{2p+1}(\xi)\sin\frac{2k\pi}{h}(\xi-a)\,d\xi$$

est moindre que

$$\int_a^b \mathrm{M}\,d\xi = (b-a)\mathrm{M} = mh\mathrm{M},$$

M désignant le maximum de $f^{2p+1}(\xi)$, pris en valeur absolue entre les limites a et b; on peut donc poser

$$\mathrm{R} = 2mh^{2p+2}f^{2p+1}(\theta)\frac{1}{(2\pi)^{2p+1}}\sum\frac{1}{k^{2p+1}},$$

θ désignant un nombre compris entre a et b; mais $\sum\frac{1}{k^{2p+1}}$ est moindre que deux; donc on a

$$(7)\qquad \mathrm{R} < 4mh^{2p+2}f^{2p+1}(\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2p+1}.$$

Nous avons appris à calculer les coefficients $\sum\frac{1}{k^p}$ au moyen des nombres de Bernoulli (p. 324); toutefois on peut observer que la formule (6) est de la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} h\mathrm{T} = \int_a^b f(\xi)\,d\xi &+ \mathrm{A}_1 h^2[f'(b) - f'(a)] \\ &+ \mathrm{A}_3 h^4[f'''(b) - f'''(a)] + \ldots + \mathrm{R};\end{aligned}\right.$$

si l'on y fait $f(\xi) = e^\xi$, on a

$$h\left(\frac{e^a}{2} + e^{a+h} + \ldots + \frac{e^b}{2}\right) = e^b - e^a + \mathrm{A}_1 h^2(e^b - e^a) + \ldots;$$

quant à R, il tend vers o pour $p = \infty$, si h est, par exemple, moindre que 2π, ce que nous supposerons; nous pouvons donc nous dispenser de l'écrire; faisons $a = 0$, $b = h$ et la formule précédente deviendra

$$\frac{h}{2}(1 + e^h) = (e^h - 1)(1 + A_1 h^2 + A_3 h^4 + \ldots)$$

ou bien

$$\frac{1 + e^h}{e^h - 1} = \frac{2}{h} + 2A_1 h + 2A_3 h^3 + \ldots$$

ou enfin

$$\frac{2}{e^h - 1} = \frac{2}{h} - 1 + 2A_1 h + 2A_3 h^3 + \ldots$$

ou

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} - \frac{1}{2} + A_1 h + A_3 h^3 + \ldots;$$

A_1, A_3, ... sont donc les coefficients de h, h^3, ..., dans le développement de $(e^h - 1)^{-1}$. On a

$$A_1 = \frac{1}{12}, \qquad A_3 = \frac{-1}{720}, \qquad A_5 = \frac{1}{30240},$$

$$A_7 = \frac{-1}{1209600}, \qquad \ldots.$$

La formule (8) permet, comme l'on voit, de calculer

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi;$$

une valeur approchée de cette intégrale est hT : c'est la somme des aires des trapèzes inscrits dans la courbe $y = f(x)$ entre les abscisses a et b et dont les bases sont égales à h; cette formule (8), résolue par rapport à l'intégrale, est

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi = h\mathrm{T} - \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + \frac{h^4}{720}[f'''(b) - f'''(a)] - \ldots.$$

III. — Formule de Boole.

On a

$$\frac{1}{2}f(a) = \frac{1}{2h}\int_a^{a+h} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_a^{a+n} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{h}(\xi-a)\,d\xi,$$

$$\frac{1}{2}f(a+h) = \frac{1}{2h}\int_a^{a+h} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_a^{a+h} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{h}(\xi-a-h)\,d\xi;$$

en retranchant ces formules membre à membre, on trouve

$$\frac{h}{2}[f(a+h)-f(a)] = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_a^{a+h} f(\xi)\cos\frac{2m+1}{h}\pi(\xi-a)\,d\xi.$$

Or l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h}\cos\frac{2m+1}{h}\pi(\xi-a)f(\xi)\,d\xi &= [f'(a+h)+f'(a)]\frac{h^2}{(2m+1)^2\pi^2}\\ &\quad - [f'''(a+h)+f'''(a)]\frac{h^4}{(2m+1)^4\pi^4}+\ldots;\end{aligned}$$

la formule précédente devient alors

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&[f(a+h)-f(a)] - A_1 h[f'(a+h)+f'(a)]\\ &\qquad - A_2 h^3[f'''(a+h)+f'''(a)]+\ldots = R,\end{aligned}\right.$$

A_1, A_2, ... désignant des coefficients indépendants de la forme de la fonction f et R un reste que l'on peut mettre sous la forme

$$2\sum\int_a^{a+h} f^{2p}(\xi)\cos\frac{2m+1}{h}\pi(\xi-a)\frac{h^{2p}}{(2m+1)^{2p}\pi^{2p}}\,d\xi.$$

On détermine A_1, A_2, ... en faisant $f(x) = e^x$ et en procédant comme on l'a fait pour démontrer la formule d'Euler; on voit que A_1, A_2, ... sont les coefficients des diverses puissances de h dans le développement de

$$\frac{e^h - 1}{e^h + 1};$$

on trouve ainsi

$$A_1 = \frac{1}{2}, \qquad A_2 = -\frac{1}{24}, \qquad A_3 = \frac{1}{240}, \qquad A_4 = \frac{-17}{40320}, \qquad \cdots$$

Si, dans la formule (1), on change a en $a+h, a+2h, \ldots, a+nh = b$ et si l'on ajoute les résultats, il vient

$$\begin{aligned}[f(b) - f(a)] &= 2A_1 h[\tfrac{1}{2}f'(a) + f'(a+h) + \ldots + \tfrac{1}{2}f'(b)] \\ &+ 2A_2 h^3[\tfrac{1}{2}f'''(a) + f'''(a+h) + \ldots + \tfrac{1}{2}f'''(b)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et, en remplaçant $f(x)$ par $\int f(x)\,dx$, on a une formule qui peut servir à l'évaluation des quadratures

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= 2A_1 h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots + \tfrac{1}{2}f(b)] \\ &+ 2A_2 h^3[\tfrac{1}{2}f''(a) + f''(a+h) + \ldots + \tfrac{1}{2}f''(b)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

IV. — Interpolation de $\sum_1^n n^i$.

La formule d'Euler permet d'interpoler la somme des puissances i des x premiers nombres entiers, au moyen d'un polynôme entier en x du degré $i+1$ que l'on a appelé un polynôme de Bernoulli.

Si, dans la formule d'Euler, on suppose $a = 0$, $b = n$, $h = 1$, $f(x) = x^i$, on a

$$\begin{aligned}&1^i + 2^i + \ldots + n^i \\ &= \frac{1}{2}n^i + \frac{n^{i+1}}{i+1} + A_1 i n^{i-1} + A_2 i(i-1)(i-2)n^{i-3} + \ldots.\end{aligned}$$

et cette série s'arrête d'elle-même. On voit que

$$1^i + 2^i + \ldots + n^i$$

est un polynôme entier en n de degré $i+1$, et que l'on a en particulier

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lorsque i n'est pas entier, le reste dans la formule d'Euler ne tend plus vers zéro et l'interpolation paraît plus difficile à effectuer : nous n'envisagerons pas ce cas.

Mais on peut trouver d'une manière beaucoup plus expéditive les sommes des puissances semblables des entiers consécutifs : la formule d'interpolation démontrée page 103, tome I, donne

$$x^m = 0^m + x\frac{\Delta^1 0^m}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 0^m + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 0^m + \ldots;$$

si, dans cette formule, on fait $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, et si l'on ajoute les résultats, on a

$$\sum_1^n x^m = \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta 0^m + \sum_1^{n-1}\frac{x(x+1)}{1.2}\Delta^2 0^m + \sum_1^{n-2}\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 0^m + \ldots$$

ou bien

$$\sum_1^n x^m = \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta 0^m + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}\Delta^2 0^m + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1.2.3.4}\Delta^3 0^m + \ldots$$

ou encore

$$\sum_1^n x^m = \frac{n(n+1)}{1.2}\left[\Delta 0^m + \frac{n-1}{3}\Delta^2 0^m + \frac{(n-1)(n-2)}{3.4}\Delta^3 0^m + \ldots\right].$$

Exemples :

$$\sum_1^n x = \frac{n(n+1)}{1.2}(1-0) = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$\sum_1^n x^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left[1^2 - 0^2 + \frac{n-1}{3}(2^2 - 2.1^2 + 0^2)\right]$$
$$= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1),$$

$$\sum x^3 = \frac{n(n+1)}{2}\left[1 + \frac{n-1}{3}6 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2},$$

. . . .

Des formules analogues pourraient être données pour la sommation des séries

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \cdots,$$

V. — Fonctions de Bernoulli.

Cherchons à développer

$$(1) \qquad \frac{e^{zx} - 1}{e^z - 1},$$

suivant les puissances ascendantes de z; si x est entier, ce développement revient à celui de

$$e^{(x-1)z} + e^{(x-2)z} + \ldots + e^z + 1$$

qui est évidemment

$$S_0(x) + \frac{z}{1}S_1(x) + \frac{z^2}{1.2}S_2(x) + \ldots + \frac{z^i}{i!}S_i(x) + \ldots,$$

et où l'on a

$$S_i(x) = 1^i + 2^i + \ldots + (x-1)^i, \qquad S_0(x) = x - 1.$$

Rien ne nous empêche d'interpoler la somme des puissances i des $x - 1$ premiers entiers, au moyen de la fonction $S_i(x)$ définie comme étant le coefficient de z^i dans le développement de la fonction (1) par la formule de Maclaurin, suivant les puissances de z. Ceci étant admis, il est facile de voir que $S_i(x)$ est un polynôme de degré $i + 1$; il doit être identique à celui que nous avons trouvé par une autre voie, puisqu'il lui est égal pour toutes les valeurs entières de x.

Pour prouver que $S_i(x)$ est un polynôme entier, nous suivrons la voie tracée par M. Hermite (*Journal de Borchardt* p. 64, 1878); remplaçant z par $z\sqrt{-1}$ dans la formule

$$(2) \quad \frac{e^{zx} - 1}{e^z - 1} = S_0(x) + \frac{z}{1} S_1(x) + \ldots + \frac{z^i}{1.2\ldots i} S_i(x) + \ldots,$$

nous aurons

$$\frac{\sin\frac{1}{2}zx \cos\frac{1}{2}z(x-1)}{\sin\frac{1}{2}z} + \sqrt{-1}\,\frac{\sin\frac{1}{2}zx \sin\frac{1}{2}z(x-1)}{\sin\frac{1}{2}z}$$
$$= S_0 x + \frac{z\sqrt{-1}}{1} S_1(x) + \ldots,$$

d'où l'on déduit, en supposant x réel,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}zx \cos\frac{1}{2}z(x-1)}{\sin\frac{1}{2}z} = S_0(x) - \frac{z^2}{1.2} S_2(x) + \ldots,$$

$$(3) \quad \frac{\sin\frac{1}{2}zx \sin\frac{1}{2}z(x-1)}{\sin\frac{1}{2}z} = \frac{z}{1} S_1(x) - \frac{z^3}{1.2.3} S_3(x) + \ldots$$

mais, en intégrant la formule (p. 325)

$$\cot\frac{1}{2}x = \frac{1}{2x} - \frac{2B_2 x}{1.2} + \frac{2B_4 x^3}{1.2.3.4} - \ldots$$

de o à x, on trouve

$$\log\sin\frac{1}{2}x = \log\frac{1}{2}x - \frac{B_2 x^2}{1.2}\,\frac{1}{2} + \frac{B_4 x^4}{1.2.3.4}\,\frac{1}{4} - \ldots.$$

En faisant usage de cette formule, le logarithme du premier membre de (3) se mettra sous la forme

$$\begin{aligned}
\log\frac{\sin\frac{1}{2}zx\sin\frac{1}{2}z(x-1)}{\sin\frac{1}{2}z}
&= \log\frac{1}{2}zx(x-1) + [1-x^2-(1-x)^2]\frac{B_2}{1.2}\frac{z^2}{2}\\
&+ [1-x^4-(1-x)^4]\frac{B_4}{1.2.3.4}\frac{z^4}{4}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ [1-x^{2n}-(1-x)^{2n}]\frac{B_{2n}}{(2n)!}\frac{z^{2n}}{2n}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En posant

$$1-x^{2n}-(1-x)^{2n}=X_{2n},$$

on a donc

$$\log\frac{\sin\frac{1}{2}zx\sin\frac{1}{2}z(x-1)}{\sin\frac{1}{2}z}
= \log\left(-\frac{1}{4}zX_2\right) + \frac{B_2}{1.2}X_2\frac{z^2}{2} + \frac{B_4X_4}{4!}\frac{z^4}{4} + \ldots$$

et, passant des logarithmes aux nombres, en vertu de (3),

$$\frac{z}{1}S_1(x) - \frac{z^3}{1.2.3}S_3(x) + \ldots = -\frac{z}{4}X_2e^{\frac{B_2X_2}{1.2}\frac{z^2}{2}+\ldots}.$$

En développant le second membre et en égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de z, on voit que $(-1)^{i+1}S_{2i+1}$ sera un polynôme entier de degré $2i+2$, fonction à coefficients positifs des polynômes X_2, X_4, X_6 .... Ce polynôme prend des valeurs égales pour $x=\alpha$ et $x=-\alpha$ et, comme X_n est nul pour $x=0$ et $x=1$, il passe par un maximum unique pour $x=\frac{1}{2}$; on voit donc que :

Le polynôme $(-1)^{i+1}S_{2i+1}$ est de degré $2i+2$; il a trois racines réelles seulement : $x=\pm1$ et $x=0$; il ne change pas quand on change x en $-x$, il est positif quand x varie de -1 à $+1$, négatif partout ailleurs et passe par un maximum pour $x=\pm\frac{1}{2}$.

Une analyse toute semblable montre que :

Le polynôme $(-1)^i \frac{S_{2i}}{2x-1}$ *est de degré* $2i$, *positif quand* x *varie de* 0 *à* 1 ; *il n'a qu'un seul maximum quand* x *reste positif et que ce maximum a lieu pour* $x = \frac{1}{2}$; *enfin ce polynôme est une fonction paire de* $2x-1$, *négative dès que* $x > 1$.

Pour calculer les polynômes $S(x)$, il suffit de développer en série $\frac{e^{zx}-1}{e^z-1}$; nous observerons pour y parvenir que

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \frac{B_1}{1} + \frac{B_2 z}{1.2} + \frac{B_3 z^2}{1.2.3} \cdots\cdots,$$

$$e^{zx} - 1 = zx + \frac{z^2x^2}{1.2} + \frac{z^3x^3}{1.2.3} \cdots$$

et, par suite,

$$\frac{e^{zx}-1}{e^z-1} = x + z\left(\frac{B_1 x}{1} + \frac{x^2}{1.2}\right) + \ldots;$$

on a donc

$$S_0(x) = x,$$

$$\frac{1}{1} S_1(x) = \frac{B_1 x}{1} + \frac{x^2}{1.2},$$

$$\frac{1}{1.2} S_2(x) = \frac{B_2 x}{1.2} + \frac{B_1 x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{n!} S_n(x) = \frac{B_n x}{n!} + \frac{B_{n-1} x^2}{(n-1)!\,2!} + \frac{B_{n-2} x^3}{(n-2)!\,3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou bien encore

$$S_n(x) = B_n x + \frac{n}{1.2} B_{n-1} x^2 + \frac{n(n-1)}{1.2.3} B_{n-2} x^3 + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

On a ainsi explicitement la valeur de la fonction qui interpole la somme $1^i + 2^i + \ldots + (x-1)^i$; mais cette valeur dépend des nombres de Bernoulli dont l'expression est compliquée.

VI. — Sur le développement de $\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^m$.

Un cas particulier du développement de $\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^m$, celui où $m = -1$, nous a fourni les nombres de Bernoulli dont nous avons reconnu toute l'importance. Le cas où m est quelconque présente également de l'intérêt; le développement a toujours lieu à l'intérieur d'un cercle de convergence de rayon égal à 2π. Si nous posons

$$y = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^m,$$

nous aurons, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{x} + m\frac{e^x}{e^x - 1};$$

si l'on remplace alors y par $1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, on déterminera les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ au moyen de l'équation

$$\begin{aligned} x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots)\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right) \\ = m(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{3x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right). \end{aligned}$$

En identifiant, on a

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m}{1.2}, \\ a_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{2m}{1.2.3} + \frac{(m-1)a_1}{1.2}\right], \\ a_3 &= \frac{1}{3}\left[\frac{3m}{1.2.3.4} + \frac{(2m-1)a_1}{1.2.3} + \frac{(m-2)a_2}{1.2}\right], \\ a_4 &= \frac{1}{4}\left[\frac{4m}{1.2.3.4.5} + \frac{(3m-1)a_1}{1.2.3.4} + \frac{(2m-2)a_2}{1.2.3} + \frac{(m-3)a^2}{1.2}\right], \end{aligned}$$

. . . .

On conclut de là que a_n est un polynôme du degré n en m;

nous le désignerons par $\frac{\varphi_n(m)}{1.2.3\ldots n}$, en sorte que l'on aura

$$(1)\qquad \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^m = 1 + \frac{\varphi_1(m)}{1}x + \frac{\varphi_2(m)}{1.2}x^2 + \ldots;$$

si l'on fait $m = 0$, le premier membre se réduisant à un, il faut que

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_n(0)\ldots = 0.$$

Si l'on fait $m = 1$, on voit que

$$\varphi_1(1) = \frac{1}{2}, \qquad \varphi_2(1) = \frac{1}{3}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(1) = \frac{1}{n+1}, \qquad \ldots;$$

si l'on fait $m = -1$, on voit que (p. 324)

$$\varphi_1(-1) = \frac{1}{2}, \qquad \varphi_2(-1) = B_2,$$

$$\varphi_3(1) = B_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(-1) = B_n, \qquad \ldots;$$

on peut calculer $\varphi_n(m)$ comme il suit quand m est entier et positif. La différence $n^{\text{ième}}$ de e^x est $e^x(e^h - 1)^n$ quand $\Delta x = h$; or on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots;$$

prenons les différences $m^{\text{ièmes}}$ des deux membres et faisons $x = 0$, nous aurons, en divisant par h^m,

$$\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)^m = \frac{(\Delta^m x^m)_{x=0}}{m!} + h\frac{(\Delta^m x^{m+1})_{x=0}}{(m+1)!} + \ldots;$$

donc

$$(2)\qquad \frac{\varphi_n(m)}{n!} = \frac{\Delta^m 0^{m+n}}{(n+m)!},$$

en écrivant $\Delta^m 0^{m+n}$, au lieu de $(\Delta^m x^{m+n})_{x=0}$, en sorte que

$$\varphi_n(m) = \frac{n!}{(n+m)!}\Delta^m 0^{m+n}.$$

Quand on connaît les valeurs de $\varphi_n(m)$ pour les valeurs entières et positives de m, il est facile de former ces polynômes;

on peut toutefois calculer les valeurs de $\varphi_n(m)$ pour les valeurs entières et négatives de m comme il suit : de (1) on tire

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{-m} = 1 + \varphi_1(-m)\frac{x}{1} + \varphi_2(-m)\frac{x^2}{1.2} + \ldots;$$

en multipliant cette formule par (1), le premier membre de l'équation résultante est 1 et, par suite, les coefficients des diverses puissances de x dans le second membre doivent être nuls. Cela fournit les équations

$$\varphi_1(m) + \varphi_1(-m) = 0,$$
$$\varphi_2(m) + 2\varphi_1(m)\varphi_1(-m) + \varphi_2(-m) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\varphi_n(m) + \frac{n}{1}\varphi_{n-1}(m)\varphi_1(-m) + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi_{n-2}(m)\varphi_2(-m) + \ldots = 0.$$

En multipliant entre eux les développements de $\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^m$ et de $\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{m'}$ et en opérant comme ci-dessus, on a la formule

$$\varphi_n(m + m') = \varphi_n(m) + \frac{n}{1}\varphi_{n-1}(m)\varphi_1(m') + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi_{n-2}(m)\varphi_2(m') + \ldots,$$

qu'il est aisé de généraliser.

On peut trouver d'autres expressions pour les fonctions $\varphi_n(m)$ quand m est entier.

Si nous posons

(3) $$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-m)},$$

nous trouvons

(4) $$xf(x+1) = f(x)(x-m).$$

Au contraire, si nous posons

(5) $$\mathrm{F}(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1),$$

nous trouvons

(6) $$x\mathrm{F}(x+1) = \mathrm{F}(x)(x+m).$$

On peut écrire

$$f(x) = \frac{a_m}{x^m} + \frac{a_{m+1}}{x^{m+1}} + \ldots,$$

$$F(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots,$$

et, en vertu de (4) et (5), on devra avoir

$$x\left[\frac{a_m}{(x+1)^m} + \frac{a_{m+1}}{(x+1)^{m+1}} + \ldots\right] = \left(\frac{a_m}{x^m} + \frac{a_{m+1}}{x^{m+1}} + \ldots\right)(x-m),$$

$$\begin{aligned} &x[b_m(x+1)^m + b_{m-1}(x+1)^{m-1} + \ldots] \\ &\quad = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots)(x+m) \end{aligned}$$

et, en identifiant,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m(m+1)}{1.2} a_m - \dfrac{m+1}{1} a_{m+1} = -m a_{m+1}, \\ \dfrac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} a_m - \dfrac{(m+1)(m+2)}{1.2} a_{m+1} + \dfrac{m+2}{1} a_{m+2} = -m a_{m+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m(m-1)}{1.2} b_m + \dfrac{m-1}{1} b_{m-1} = m b_{m-1}, \\ \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} b_m + \dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2} b_{m-1} + \dfrac{m-2}{1} b_{m-2} = m b_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si l'on change m en $-m$ dans les formules (8) on voit, en les comparant avec (7), que, quel que soit i,

$$a_{m+i} = b_{m+i}.$$

Or les quantités a_{m+i} sont faciles à calculer ; en effet

$$\begin{aligned} &\frac{1.2.3\ldots m}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)} \\ &\quad = \frac{1}{x-m} - \frac{m}{1}\,\frac{1}{x-(m-1)} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{x-(m-2)} - \ldots; \end{aligned}$$

on en conclut

$$\begin{aligned} \frac{m!}{x(x-1)\ldots(x-m)} &= \frac{1}{x^{m+1}}\left[m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \ldots\right] \\ &\quad + \frac{1}{x^{m+2}}\left[m^{m+1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+1} + \ldots\right] \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-m)} = \frac{1}{x^m}\,\frac{\Delta^m 0^m}{m!} + \frac{1}{x^{m+1}}\,\frac{\Delta^m 0^{m+1}}{m!} + \dots;$$

donc

$$a_{m+i} = \frac{\Delta^m 0^{m+i}}{m!}$$

ou, en vertu de la formule (2),

$$a_{m+i} = \frac{(i+m)!}{i!}\,\varphi_i(m)\,\frac{1}{m!}$$

ou enfin

$$a_{m+i} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+i)\varphi_i(m)}{1.2.3\dots i};$$

par conséquent,

$$b_{m+i} = \frac{(-1)^i(m-1)(m-2)\dots(m-i)\varphi_i(-m)}{1.2.3\dots i}.$$

D'un autre côté, on a

$$(x+1)(x+2)\dots(x+m) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots,$$

p_i désignant la somme des produits i à i des m premiers entiers; on a donc

$$p_i = (-1)^i(m-1)(m-2)\dots(m-i)\,\frac{\varphi_i(-m)}{i!};$$

et la quantité p_i se trouve ainsi interpolée par les fonctions $\varphi_i(-m)$.

VII. — Développement de $\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^m$.

On a, en posant $1+x=e^z$,

$$\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^m = \left(\frac{z}{e^z-1}\right)^m;$$

demander le développement de $\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^m$ suivant les puissances croissantes de x, c'est demander celui de $\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^{-m}$

suivant les puissances de $e^z - 1$; d'où l'on pourra conclure ensuite le développement suivant les puissances de z. Ceci posé, on a

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots ;$$

mais on a aussi

$$(1+x)^m = e^{m\log(1+x)} = 1 + \frac{m}{1}\log(1+x) + \frac{m^2}{1.2}[\log(1+x)]^2 + \ldots,$$

on en conclut

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots = 1 + \frac{m}{1}\log(1+x) + \ldots.$$

Si l'on développe alors le premier membre de cette formule suivant les puissances de m et si l'on égale les coefficients de m^i, on trouve

$$\frac{[\log(1+x)]^i}{1.2.3\ldots i} = x^i\left[\frac{1}{1.2.3\ldots i} - \frac{P_i^1 x}{1.2\ldots(i+1)} + \frac{P_{i+1}^2 x^2}{1.2\ldots(i+2)}\ldots\right]$$

ou bien

$$(1) \qquad \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^i = 1 - \frac{P_i^1 x}{i+1} + \frac{P_{i+1}^2 x^2}{(i+1)(i+2)} - \ldots,$$

P_k^l désignant la somme des produits des k premiers nombres pris l à l.

Il est à remarquer que, si la fonction $f(x)$ est telle que la dérivée, $f^n(x)$ est développable sous la forme

$$\Delta x^n f^n(x) = A\Delta^n f + B\Delta^{n+1} f + C\Delta^{n+2} f + \ldots,$$

A, B, C, ... étant indépendants de f. Ces coefficients seront précisément ceux que nous venons de trouver pour le développement de $\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^n$; pour s'en convaincre, il suffit de faire $f(x) = e^x$, $\Delta x = h$; on a alors

$$h^n e^x = Ae^x(e^h-1)^n + Be^x(e^h-1)^{n+1} + \ldots$$

ou, divisant par e^x et faisant $e^h = 1 + z$,

$$\left[\frac{\log(1+z)}{z}\right]^n = A + Bz + Cz^2 + \ldots.$$

C. Q. F. D.

Ainsi se trouve complétée la remarque faite tome I, p. 109.

La méthode précédente suppose i entier ; si i est quelconque, $\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^i$ est encore développable quand $\bmod x < 1$ et, pour trouver son développement, on partira de la formule

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{-i} = 1 + \varphi_1(-i)\frac{x}{1} + \varphi_2(-i)\frac{x^2}{1.2} + \ldots;$$

on fera ensuite $e^x = 1 + z$, et l'on aura

$$\left[\frac{\log(1+z)}{z}\right]^i = 1 + \varphi_1(-i)\, z\, \frac{\log(1+z)}{z} + \varphi_2(-i)\frac{z^2}{1.2}\left[\frac{\log(1+z)}{z}\right]^2 + \ldots.$$

En faisant alors usage de la formule (1) pour développer les puissances entières de $\frac{\log(1+z)}{z}$, on obtiendra le développement de $\left[\frac{\log(1+z)}{z}\right]^i$; on aura interpolé par ce procédé les fonctions numériques P_k^l. On trouve

$$\left[\frac{\log(1+z)}{z}\right]^i = 1 + z\,\varphi_1(-i) - z^2\left[\frac{1}{2}\varphi_1(-i) - \frac{1}{2}\varphi_2(-i)\right] + z^3\left[\frac{1}{3}\varphi_1(-i) - \frac{1}{2}\varphi_2(-i) + \frac{1}{6}\varphi_3(-i)\right] - \ldots.$$

VIII. — Théorème d'Herschel.

Proposons-nous de trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\varphi(e^x)$. Si l'on fait $e^x = u$, on a

$$\frac{d\varphi(u)}{dx} = \varphi'(u)e^x,$$

$$\frac{d^2\varphi(u)}{dx^2} = \varphi'(u)e^x + \varphi''(u)e^{2x},$$

et il est facile de voir qu'en général on trouve

$$\frac{d^n \varphi(u)}{dx^n} = \varphi'(u)e^x + a_2\varphi''(u)e^{2x} + \ldots + a_n\varphi^n(u)e^{nx}.$$

Pour déterminer les coefficients constants $a_2, a_3, \ldots, a_n$, on fera $\varphi(u) = u, u^2, u^3, \ldots, u^n$: on aura alors pour $\frac{d^n(\varphi u)}{dx^n}$ les valeurs correspondantes $1^n e^x, 2^n e^{2x}, \ldots, n^n e^{nx}$, ce qui fournit les relations suivantes, après la suppression du facteur exponentiel :

$$\begin{aligned}
&1^n = 1,\\
&2^n = 2 + 2a_2,\\
&3^n = 3 + 2.3a_2 + 1.2.3a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&p^n = p + p(p-1)a_2 + p(p-1)(p-2)a_3 + \ldots + p(p-1)\ldots a_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'on pose $a_p = \frac{b_p}{1.2.3\ldots p}$, on a

$$p^n = p + \frac{p(p-1)}{1.2}b_2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}b_3 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots 1}{1.2.3\ldots p}b_p;$$

la comparaison de cette formule avec

$$p^n = 0^n + \frac{p}{1}\Delta 0^n + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 0^n + \ldots$$

montre que

$$b_p = \Delta^p 0^n, \qquad a_p = \frac{\Delta^p 0^n}{1.2.3\ldots p}.$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}
\frac{d^n \varphi(e^x)}{dx^n} = \varphi'(e^x)e^x &+ \frac{\Delta^2 0^n}{1.2}\varphi''(e^x)e^{2x} + \ldots\\
&+ \frac{\Delta^p 0^n}{1.2.3\ldots p}\varphi^p(e^x)e^{px} + \ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on fait $x = 0$, on voit que, si $\varphi(e^x)$ est développable suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de x^n sera

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi'(1)\frac{\Delta 0^n}{1} + \varphi''(1)\frac{\Delta^2 0^n}{1.2} + \ldots + \varphi^p(1)\frac{\Delta^p 0^n}{1.2\ldots p} + \ldots\right];$$

c'est en cela que consiste le théorème d'Herschel que nous voulions établir.

Appliquons les considérations précédentes au développement de $\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^m$; en d'autres termes, posons

$$\varphi(u) = \left(\frac{u-1}{\log u}\right)^m,$$

nous aurons une nouvelle expression des polynômes appelés $\varphi(m)$ au paragraphe précédent. Nous supposerons seulement $m = -1$; alors nous aurons

$$\varphi(u) = \frac{\log u}{u-1},$$

donc

$$\varphi(1+v) = \frac{\log(1+v)}{v} = 1 - \frac{v}{2} + \frac{v^2}{3} - \ldots;$$

donc

$$\varphi(1) = 1, \qquad \frac{\varphi'(1)}{1} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\varphi''(1)}{1.2} = \frac{1}{3}, \qquad \ldots;$$

on en conclut que le coefficient de x^n dans le développement de $\frac{x}{e^x - 1}$, ou plutôt que le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli a pour expression

$$-\frac{1}{2}\Delta 0^n + \frac{1}{3}\Delta^2 0^n - \frac{1}{4}\Delta^3 0^n + \ldots.$$

IX. — Interpolation du produit $1.2.3\ldots x = x!$

Legendre, ayant remarqué que l'intégrale (p. 132)

$$\int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt,$$

x désignant un entier positif quelconque, avait pour valeur $1.2.3\ldots x$, avait songé à interpoler la fonction numérique $1.2.3\ldots x$ au moyen de l'intégrale en question, et il avait posé en conséquence

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt;$$

mais la fonction $\Gamma(x+1)$ ainsi définie n'a de valeurs que

pour des valeurs réelles et positives de x, ou pour des valeurs imaginaires de x dont la partie réelle est positive. Gauss est parvenu à donner une solution plus satisfaisante de la question qui nous occupe.

Posons

$$f(m,x)=\int_0^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{x-1}dt,$$

nous aurons, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} f(m,x) &= \int_0^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^{m-1} \frac{t^x}{x}\,dt \\ &= \int_0^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^{m-2} \frac{m-1}{m}\,\frac{t^{x+1}}{x(x+1)}\,dt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \int_0^m \frac{(m-1)(m-2)\ldots 2.1}{m^{m-1}x(x+1)\ldots(x+m-1)}\,t^{x+m-1}dt \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(1)\qquad f(m,x)=\frac{m^x.1.2.3\ldots m}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}.$$

Maintenant je dis que, pour $m=\infty$, $f(m,x)$ est égal à $\Gamma(x)$. En effet, il est facile de voir que $\Gamma(x)=1.2.3\ldots(x-1)$ quand x est entier, et que $f(\infty,x)$ est aussi égal à

$$1.2\ldots(x-1)$$

pour des valeurs entières de x; en effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(m,x) &= \frac{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(x-1).m^x}{1.2.3\ldots(x+m)} \\ &= \frac{1.2.3\ldots(x-1)m^x}{(m+1)(m+2)\ldots(m+x)} \\ &= \frac{1.2.3\ldots(x-1)}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{m}\right)}. \end{aligned}$$

Le dénominateur pour $m=\infty$ se réduit à 1 : on a donc bien $f(\infty,x)=1.2.3\ldots(x-1)$. Ceci posé, on a

$$f(m,x)-\Gamma(x)=\int_0^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{x-1}dt-\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Le second membre de cette formule tend vers zéro pour $m = \infty$, toutes les fois que x est entier. Je dis qu'il en sera toujours de même. En effet la différence des deux intégrales est

$$\int_0^m \left[\left(1-\frac{t}{m}\right)^m - e^{-t}\right] t^{x-1}\,dt - \int_m^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

La seconde intégrale ayant toujours pour limite zéro, la limite de $f(m, x) - \Gamma(x)$ se réduit à

$$\lim \int_0^m \left[\left(1-\frac{t}{m}\right)^m - e^{-t}\right] t^{x-1}\,dt;$$

or cette quantité, étant nulle pour une valeur entière de x, sera évidemment nulle quand on remplacera t^{x-1} par $t^{\alpha-1}$, α désignant un nombre moindre que x; on a donc

$$(2) \qquad \Gamma(x) = \lim f(m, x), \quad \text{pour} \quad (m = \infty).$$

On considérera donc dorénavant $\Gamma(x)$ comme la limite de $f(m, x)$, ainsi que l'a fait Gauss.

Lemme. — *L'expression* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \log m$ *tend vers une limite finie pour* $m = \infty$; on appelle cette limite *la constante d'Euler*.

On a en effet identiquement

$$\log m = \log(m-1) + \log\left(1 + \frac{1}{m-1}\right);$$

donc (p. 287)

$$\log m = \log(m-1) + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{2(m-1)^2} + \frac{1}{3(m-1)^3} - \ldots,$$

$$\log(m-1) = \log(m-2) + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{2(m-2)^2} + \frac{1}{3(m-2)^3} - \ldots,$$

. . . . ,

$$\log 2 = \log 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2.1^2} + \frac{1}{3.1^3} - \ldots;$$

en ajoutant, on a

$$(a) \qquad \log m = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right) - \frac{s'_2}{2} + \frac{s'_3}{3} - \ldots,$$

en posant

$$s'_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^2},$$

$$s'_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^3},$$

. . . .

Appelons s_2, s_3, ... les limites de s'_2, s'_3, ... pour $m = \infty$; il est clair que la série

$$\frac{s_2 - s'_2}{2} - \frac{s_3 - s'_3}{3} + \frac{s_4 - s'_4}{4} - \ldots$$

a ses termes décroissants et que sa valeur est moindre que $\frac{1}{2}(s_2 - s'_2)$; on peut la représenter par $\frac{\theta}{2}(s_2 - s'_2)$, et la formule (a) devient alors

$$\log m = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right) - \frac{s_2}{2} + \frac{s_3}{3} - \frac{s_4}{4} + \ldots + \frac{\theta}{2}(s_2 - s'_2) - \frac{1}{m}.$$

Or, si l'on fait $m = \infty$, $s_2 - s'_2$ tend vers zéro, ainsi que $\frac{1}{m}$, et l'on en conclut

$$(b) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \log m = \frac{s_2}{2} - \frac{s_3}{3} + \frac{s_4}{4} - \ldots.$$

Le second membre de cette formule est extrêmement peu convergent et ne saurait servir au calcul de la constante d'Euler, mais il nous suffit pour le moment de savoir que cette constante existe. Toutefois, on peut rendre cette série convergente par le procédé d'Euler, que nous allons exposer. Legendre a donné une Table des sommes s dans ses *Exercices de Calcul intégral;* en voici un extrait : on les calcule par la formule du § 2.

$s_1 = \infty$	$s_9 = 1,0020084$	$s_{17} = 1,0000076$
$s_2 = 1,6449341$	$s_{10} = 1,0009946$	$s_{18} = 1,0000038$
$s_3 = 1,2020569$	$s_{11} = 1,0004942$	$s_{19} = 1,0000019$
$s_4 = 1,0823232$	$s_{12} = 1,0002461$	$s_{20} = 1,0000010$
$s_5 = 1,0369278$	$s_{13} = 1,0001227$	$s_{21} = 1,0000005$
$s_6 = 1,0173431$	$s_{14} = 1,0000612$	$s_{22} = 1,0000002$
$s_7 = 1,0083493$	$s_{15} = 1,0000305$	$s_{23} = 1,0000001$
$s_8 = 1,0040774$	$s_{16} = 1,0000152$	

const. d'Euler $= 0,5772157 = C.$

X. — Sur une formule d'Euler destinée à augmenter la convergence des séries.

Nous allons maintenant faire connaître la formule d'Euler dont il a été question tout à l'heure.

Soit

$$(1)\qquad f(x) = u_0 x - u_1 x^2 + u_2 x^3 - u_3 x^4 + \ldots ;$$

u_0, u_1, ... désignant des quantités indépendantes de x, si l'on remplace x par $\frac{y}{1-y}$ ou par $y + y^2 + y^3 + \ldots$, on trouve

$$f(x) = u_0 y + \left.\begin{array}{r} u_0 \\ -u_1 \end{array}\right| y^2 + \left.\begin{array}{r} u_0 \\ -2u_1 \\ -u_2 \end{array}\right| y^3 + \left.\begin{array}{r} u_0 \\ -3u_1 \\ +3u_2 \\ -u_3 \end{array}\right| y^4 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = y u_0 - y^2 \Delta u_0 + y^3 \Delta^2 u_0 - y^4 \Delta^3 u_0 + \ldots$$

et, en remplaçant y par sa valeur $\frac{x}{1+x}$,

$$f(x) = u_0 \frac{x}{1+x} - \Delta u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \ldots ;$$

si l'on compare cette formule à (1) et si l'on fait $x = 1$, on a

$$(2)\qquad u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots = \tfrac{1}{2} u_0 - \tfrac{1}{4} \Delta u_0 + \tfrac{1}{8} \Delta^2 u_0 - \ldots.$$

Nos raisonnements supposent la série (1) convergente pour $x = 1$; en général, le second membre de la formule (2) est bien plus convergent que le premier (l'expérience le prouve). Voici maintenant une forme curieuse que l'on peut donner au théorème qui se trouve compris dans la formule (2). Cette formule peut s'écrire

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots = \tfrac{1}{2} u_1 - \tfrac{1}{4} \Delta u_1 + \tfrac{1}{8} \Delta^2 u_1 - \ldots$$

ou encore

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots = u_0 - \tfrac{1}{2} u_1 + \tfrac{1}{4} \Delta u_1 - \tfrac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \ldots.$$

Posons

$$s_0 = u_0, \qquad s_1 = u_0 - u_1, \qquad s_2 = u_0 - u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3, \qquad \ldots.$$

Faisons les moyennes $M_1 s_0$, $M_1 s_1$, $M_1 s_2$, ... des deux termes consécutifs de la suite s_0, s_1, s_2, ..., nous aurons

$$M_1 s_0 = u_0 - \tfrac{1}{2} u_1, \qquad M_1 s_1 = u_0 - u_1 + \tfrac{1}{2} u_2,$$

$$M_1 s_2 = u_0 - u_1 + u_2 - \tfrac{1}{2} u_3, \qquad \ldots;$$

faisons les moyennes $M_2 s_0$, $M_2 s_1$, ... des termes consécutifs de cette nouvelle suite, nous aurons

$$M_2 s_0 = u_0 - \tfrac{1}{2} u_1 + \tfrac{1}{4} \Delta u_1,$$

$$M_2 s_1 = u_0 - \tfrac{1}{2} u_1 + \tfrac{1}{4} \Delta u_1 - \tfrac{1}{4} \Delta u_2, \qquad \ldots,$$

puis

$$M_3 s_0 = u_0 - \tfrac{1}{2} u_1 + \tfrac{1}{4} \Delta u_1 - \tfrac{1}{8} \Delta^2 u_1, \qquad \ldots.$$

Il est facile de calculer l'erreur commise en prenant pour valeur de la série $M_n s_0$; il suffit pour cela d'écrire les restes des développements de $\frac{y}{1-y}$, $\left(\frac{y}{1-y}\right)^2$, ..., quand dans (1), à la place de x, on met $\frac{y}{1-y}$; mais dans les applications de la formule d'Euler les $\Delta^n u_1$ vont le plus souvent en décroissant et sont positifs.

On arrive ainsi à ce résultat paradoxal que, pour calculer $\frac{\pi}{4}$ au moyen de la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, il suffit d'un très petit nombre de termes pour obtenir une grande approximation, parce que $\Delta^n u_1$ tend rapidement vers zéro. Dix termes donnent π avec sept décimales.

XI. — Propriétés de la fonction Γ.

Autrefois on déduisait volontiers les propriétés de la fonction Γ de la formule

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-z} z^x \, dz;$$

mais, cette formule ayant l'inconvénient d'être illusoire pour les valeurs négatives de x, il vaut mieux adopter la définition donnée par Gauss, à savoir (p. 438)

$$\Gamma(x) = \lim f(m, x), \qquad (m = \infty).$$

Si, dans cette formule, on remplace $f(m, x)$ par sa valeur (1), on a

$$(3) \qquad \Gamma(x) = \lim \frac{m^x . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots m}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}.$$

Théorème Ier. — *La fonction $\Gamma(x)$ est toujours finie quand x est fini et n'est pas un entier nul ou négatif; elle est d'ailleurs monodrome et monogène.*

En effet, en prenant les logarithmes des deux membres de la formule (1), on a

$$(4) \quad \begin{cases} \log f(m, x) = x \log m - \log x - \log\left(1 + \frac{x}{1}\right) \\ \qquad - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ldots - \log\left(1 + \frac{x}{m}\right), \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire comme il suit, en supposant le module de x moindre que l'unité,

$$\log f(m, x) = x \log m - \log x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots$$
$$- \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots$$
$$- \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \ldots.$$

Si l'on pose alors

$$s_2^{(m)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{m^2},$$

$$s_3^{(m)} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{m^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la formule précédente donnera

$$\log f(m, x) = x\left(\log m - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{m}\right)$$
$$- \log x + \frac{s_2^{(m)}}{2} x^2 - \frac{s_3^{(m)}}{3} x^3 + \frac{s_4^{(m)}}{4} x^4 - \ldots.$$

En observant alors que, pour $m = \infty$, le premier terme du second membre de cette formule n'est autre chose que la constante d'Euler multipliée par $-x$, on a, en passant aux limites,

$$(5)\quad \log\Gamma(x) = -Cx - \log x + \frac{1}{2}s_2x^2 - \frac{1}{3}s_3x^3 + \frac{1}{4}s_4x^4 - \dots,$$

s_2, s_3, ... désignant les valeurs des séries convergentes dans lesquelles se changent s_2^m, s_3^m, ... pour $m = \infty$. En repassant des logarithmes aux nombres, il vient

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}e^{-Cx+\frac{1}{2}s_2x^2-\dots},$$

et cette formule ayant lieu pour toutes les valeurs du module de x inférieur à l'unité, la fonction $\Gamma(x)$ est finie, continue, monodrome et monogène pour toutes les valeurs du module de x moindres que l'unité, excepté pour $x = 0$.

Pour démontrer la même proposition relativement aux autres valeurs de x, par exemple pour un module de x moindre que 2, on suivra le même procédé, c'est-à-dire que dans la formule (4) on ne développera plus $\log\left(1 + \frac{x}{1}\right)$, mais $\log\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ et les logarithmes suivants; et l'on arrivera aux mêmes conclusions, etc.

Théorème II. — *La dérivée* $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ *a pour valeur, en vertu de* (5),

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + s_2x - s_3x^2 + s_4x^3 - \dots.$$

Théorème III. — *On a* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Ce dont on s'assure en calculant par la formule (3) le rapport $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$.

Théorème IV. — *On a* $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

En effet, en remplaçant x par $1 - x$ dans la formule (3) et en la multipliant par la formule ainsi obtenue, on a

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim \frac{m^x}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{m}\right)} \times \frac{m^{-x}}{\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{m}\right)}\,\frac{m}{m+1}$$

ou

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots}.$$

Si l'on se rappelle le développement de $\sin x$ en produit (p. 320), on reconnaît sans peine que le dénominateur dans le second membre est $\dfrac{\sin \pi x}{\pi}$; on a donc

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x};$$

si l'on fait $x = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

On a, par suite, en vertu de la propriété $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1.3}{4}\sqrt{\pi}, \qquad \ldots,$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{1.3}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{-8}{1.3.5}\sqrt{\pi}, \qquad \ldots.$$

Théorème V. — *On a*

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-\frac{1}{2}}.$$

En effet, le carré du premier membre est

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\cdots,$$

c'est-à-dire, en vertu du théorème IV,

$$\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi};$$

or on a

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\prod_1^n\frac{e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}-e^{-\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}}{2\sqrt{-1}}$$
$$=\prod_1^n\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(1-e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right)e^{-\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}},$$

mais

$$\Pi\left(x-e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right)=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1;$$

pour $x=1$ cette quantité se réduit à n et l'on a

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{n}{2^{n-1}}e^{-\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Le carré du produit cherché est donc $\frac{\pi^{n-1}2^{n-1}}{n}$, et le produit lui-même est $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. Q. F. D.

Théorème VI. — *La formule suivante est donnée par Legendre dans ses* Exercices de Calcul intégral :

$$(1)\qquad \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)}=n^{-nx}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}:\sqrt{n}.$$

Pour démontrer la formule (1), on part de la formule de Gauss

$$f(m,x)=\frac{m!\,m^x}{x(x+1)\ldots(x+m)},$$

et l'on a

$$f(m, x)f\left(m, x+\frac{1}{n}\right)\dots f\left(m, x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= \frac{(m!)^n m^{nx} m^{\frac{n-1}{2}}}{x\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(x+\frac{2}{n}\right)\dots\left(x+m+\frac{n-1}{n}\right)},$$

$$f(mn, nx) = \frac{(mn)!\, m^{nx} n^{nx}}{nx(nx+1)\dots(nx+mn)};$$

divisant ces formules membre à membre, il vient

$$\frac{f(m, x)f\left(m, x+\frac{1}{n}\right)\dots f\left(m, x+\frac{n-1}{n}\right)}{f(mn, nx)\, n^{-nx}}$$
$$= \frac{(m!)^n m^{\frac{n-1}{2}} n^{nm+n}}{(nx+mn+1)\dots(nx+mn+n-1)};$$

si alors on fait $m = \infty$, on trouve

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)\, n^{-nx}} = \lim \frac{(m!)^n m^{\frac{n-1}{2}} n^{nm+n}}{(mn)^{n-1}}.$$

Le premier membre de cette formule est donc indépendant de x; on peut alors l'évaluer en faisant $x = 1$, ce qui donne (théorème III)

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(n)\, n^{-n}} = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

ou, d'après ce que l'on a vu (théorème V),

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}};$$

on a donc

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = \Gamma(nx)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx}:\sqrt{n}.$$

C. Q. F. D.

La formule $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin x\pi}$ est un cas particulier d'une formule plus générale et que nous allons faire connaître. On a

$$f(m, x) = \frac{m!\, m^x}{x(1+x)(2+x)(3+x)\ldots(m+x)}$$

ou

$$f(m, x) = \frac{m^x}{x\left(1+\dfrac{x}{1}\right)\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{x}{m}\right)};$$

donc

$$f(m, -x) = \frac{-\,m^{-x}}{x\left(1-\dfrac{x}{1}\right)\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x}{m}\right)}.$$

Soit $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{n}$, on aura $\alpha^n = 1$; en remplaçant successivement x par $\alpha x, \alpha^2 x, \ldots \alpha^{n-1}x$ dans cette formule, et en faisant les produits des résultats obtenus, on trouvera

$$\begin{aligned} &f(m, -x)f(m, -\alpha x)\ldots f(m, -\alpha^{n-1}x) \\ &\quad = \frac{(-1)^n}{-x^n(-1)^n(1-x^n)\left(1-\dfrac{x^n}{2^n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x^n}{m^n}\right)}; \end{aligned}$$

en faisant $m = \infty$, on a

$$\Gamma(-x)\Gamma(-\alpha x)\ldots\Gamma(-\alpha^{n-1}x) = \frac{-1}{x^n\left(1-\dfrac{x^n}{1^n}\right)\left(1-\dfrac{x^n}{2^n}\right)\cdots};$$

par suite :

THÉORÈME VII. — *On a*

$$x\left(1-\frac{x}{1^n}\right)\left(1-\frac{x}{2^n}\right)\cdots = \left[-\Gamma(-\sqrt[n]{x})\,\Gamma(-\alpha\sqrt[n]{x})\ldots\Gamma(-\alpha^{n-1}\sqrt[n]{x})\right]^{-1}.$$

On en déduit de nouvelles formules par la différentiation logarithmique.

XII. — Propriétés de la fonction $\log \Gamma(x)$ et de ses dérivées.

Posons toujours

$$s_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$s_3 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous avons trouvé au paragraphe antéprécédent, formule (5),

$$(5) \qquad \log \Gamma(x) = -Cx - \log x + \frac{s_2 x^2}{2} - \frac{s_3 x^3}{3} + \ldots,$$

C désignant la constante d'Euler. Ajoutons $\log x$ aux deux membres et observons que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et, par suite, que

$$\log \Gamma(x+1) = \log \Gamma(x) + \log x;$$

nous aurons

$$(6) \qquad \log \Gamma(x+1) = -Cx + \frac{1}{2} s_2 x^2 - \frac{1}{3} s_3 x^3 + \ldots;$$

ainsi la fonction $\log \Gamma(x+1)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de x.

Différentions maintenant la formule (5), nous trouverons

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = -C - \frac{1}{x} + s_2 x - s_3 x^2 + s_4 x^3 - \ldots;$$

en différentiant encore, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} &= \frac{1}{x^2} + s_2 - 2 s_3 x + 3 s_4 x^2 - \ldots \\
&= \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \\
&\quad - \frac{2x}{1} - \frac{2x}{2^3} - \frac{2x}{3^3} - \frac{2x}{4^3} - \ldots \\
&\quad + \frac{3x^2}{1} + \frac{3x^2}{2^4} + \frac{3x^2}{3^4} + \frac{3x^2}{4^4} + \ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou, en groupant les termes d'une même colonne verticale,

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \ldots;$$

si l'on intègre à partir de $x = 1$, on a, en observant que, en vertu de (6), la dérivée de $\log \Gamma(1)$ est $-C$,

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \ldots$$

ou

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} &= -C + \frac{x-1}{1.x} + \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{3(x+2)} + \ldots, \\ \frac{1}{1} \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \ldots, \\ -\frac{1}{1.2} \frac{d^3 \log \Gamma(x)}{dx^3} &= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \ldots, \\ \frac{1}{1.2.3} \frac{d^4 \log \Gamma(x)}{dx^4} &= \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

La première formule est plus élégante quand on y remplace x par $x + 1$; alors elle devient

$$(8) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} \\ &\quad = -C + x\left[\frac{1}{1.(x+1)} + \frac{1}{2.(x+2)} + \frac{1}{3.(x+3)} \ldots\right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules ne sont démontrées que pour les valeurs de x moindres que l'unité ou dont le module est moindre que un ; mais la formule

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots$$

dont on les déduit peut se vérifier pour toutes les valeurs de x. En effet, si l'on ajoute aux deux membres

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{dx^2} = \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} - \frac{1}{x^2},$$

on aura

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots,$$

ce qui montre que l'on peut ajouter l'unité à la variable, sans que les formules (7) cessent d'être exactes. Pour étendre ces formules au cas où x a une valeur imaginaire quelconque, on peut observer que les deux membres sont monodromes et monogènes et qu'étant égaux tout le long de l'axe des x, ils doivent être toujours égaux.

Les fonctions Γ permettent d'interpoler les fonctions

$$\theta_1(x+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x},$$

$$\theta_2(x+1) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{x^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ainsi l'on a

$$\theta_2(x) = s_2 - \frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{dx^2} - 1,$$

$$\theta_3(x) = s_3 + \frac{1}{1.2} \frac{d^3 \log \Gamma(x+1)}{dx^3} - 1,$$

$$\theta_4(x) = s_4 - \frac{1}{1.2.3} \frac{d^4 \log \Gamma(x+1)}{dx^4} - 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les mêmes formules ne permettent pas d'interpoler $\theta_1(x+1)$; mais on peut y arriver en observant que, si l'on veut avoir pour $\theta_1(x+1)$ une fonction continue, on aura

$$\theta_1(x+1) - \theta_1(x) = \frac{1}{x},$$

$$\theta'_1(x+1) - \theta'_1(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Si l'on suppose $\theta'(\infty) = 0$, on pourra écrire

$$\theta'_1(x+2) - \theta'_1(x+1) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$\theta'_1(x+3) - \theta'_1(x+2) = -\frac{1}{(x+2)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite,

$$\theta_1'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \dots$$

ou

$$\theta_1'(x) = \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2};$$

donc

$$\theta_1(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + k;$$

k désignant une constante, si l'on fait $x = 2$, on a $\theta_1(x) = 1$,

$$1 = \left[\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}\right]_{x=2} + k$$

ou, en vertu de (8),

$$1 = -C + s_2 + k;$$

donc

$$k = 1 - s_2 + C$$

et, par suite,

$$\theta_1(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + 1 - s_2 + C.$$

XIII. — Décomposition de $\Gamma(x)$ en facteurs primaires.

Reprenons la formule (8) du paragraphe précédent :

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C + x\left[\frac{1}{1(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{3(x+3)} + \dots\right];$$

changeons-la dans la suivante

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) + \dots;$$

en intégrant entre les limites o et x, on a

$$\log \Gamma(x+1) = -Cx + [x - \log(x+1)] + \left[\frac{x}{2} - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right] + \dots$$

ou bien

$$\Gamma(x+1) = e^{-Cx} \frac{e^x}{1+x} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}} \cdots$$

ou bien encore

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \Pi \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

La fonction $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ est donc monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan et le point à l'infini est un point essentiel. On obtient le développement de la fonction $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ suivant les puissances de x en observant que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x+1)} &= e^{Cx - \frac{1}{2} s_2 x^2 + \frac{1}{3} s_3 x^3 - \cdots} \\ &= e^{Cx}\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2} s_2 x^2 - \frac{1}{3} s_3 x^3 \cdots\right) + \cdots\right] \\ &= e^{Cx}\left[1 - \frac{1}{2} s_2 x^2 + \frac{1}{3} s_3 x^3 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

XIV. — Formules de Stirling et de Gudermann.

Si l'on considère l'expression

$$(1) \qquad \int_x^{x+1} \log\Gamma(z)\, dz = u,$$

on trouve

$$\frac{du}{dx} = \log\Gamma(x+1) - \log\Gamma(x) = \log x;$$

donc, en désignant par C une constante à déterminer,

$$u = \int \log x\, dx + C$$

ou bien

$$(2) \qquad u = x \log x - x + C.$$

Pour déterminer la constante C, nous ferons $x = 0$: nous aurons alors

$$u = \int_0^1 \log\Gamma(z)\,dz = C;$$

changeant z en $1 - z$, il viendra

$$\int_0^1 \log\Gamma(1-z)\,dz = C$$

et, en ajoutant,

$$\int_0^1 \log[\Gamma(z)\Gamma(1-z)]\,dz = 2C$$

et, par suite,

$$2C = \int_0^1 \log\frac{\pi}{\sin z\pi}\,dz = \int_0^1 \log\pi\,dz - \int_0^1 \log\sin\pi z\,dz$$

ou

$$(3) \qquad C = \tfrac{1}{2}\log\pi - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \log\sin\pi z\,dz.$$

Pour évaluer l'intégrale qui figure dans C, nous la mettrons sous la forme

$$\lim\frac{1}{n}\left(\log\sin\frac{\pi}{n} + \log\sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \log\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$= \lim\frac{1}{n}\log\left(\frac{e^{\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\cdots\frac{e^{\frac{n-1}{n}\pi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{n-1}{n}\pi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$= \lim\frac{1}{n}\log\left[\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\sqrt{-1})^{n-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}\right)\cdots\left(1 - e^{-\frac{n-1}{n}2\pi\sqrt{-1}}\right)\right];$$

mais, en général $\left(x - e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}\right)\cdots\left(x - e^{-\frac{n-1}{n}2\pi\sqrt{-1}}\right)$ est égal à $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, et pour $x = 1$ cette expression devient égale à n. Notre intégrale peut donc s'écrire

$$\lim\frac{1}{n}\log\frac{ne^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(n-1)}}{2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

or $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}}$; il reste donc à trouver la limite de $\frac{1}{n}\log\frac{n}{2^{n-1}}$ ou de $\frac{1}{n}\log n - \frac{1}{n}\log 2^{n-1}$: le premier terme est nul, le second peut s'écrire $-\frac{n-1}{n}\log 2$, sa limite est $-\log 2$, et par suite la formule (3) donne

$$C = \tfrac{1}{2}\log\pi + \tfrac{1}{2}\log 2 = \tfrac{1}{2}\log 2\pi;$$

la formule (2) devient alors

$$(4) \qquad \int_x^{x+1} \log\Gamma(x)\,dx = x\log x - x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi;$$

c'est une formule remarquable en elle-même et que nous allons utiliser.

Dans la formule d'Euler (p. 420) prenons $m = 1$, elle devient

$$\frac{h}{2}[f(b)+f(a)] = \int_a^b f(\xi)\,d\xi + A_1[f'(b)-f'(a)]h^2 + \ldots.$$

Soient $b = a+1$, $h = 1$ et $f(x) = \log\Gamma(x)$; nous aurons

$$\log\Gamma(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}$$
$$= \int_a^{a+1}\log\Gamma(\xi)\,d\xi + A_1\left[\frac{d}{db}\log\Gamma(b) - \frac{d}{da}\log\Gamma(a)\right] + \ldots$$

ou, en vertu de (4) et en remplaçant $\Gamma(a+1)$ par $a\Gamma(a)$

$$\log\Gamma(a) + \frac{1}{2}\log a = a\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{A_1}{a} + \frac{A_3}{a^3} + \ldots$$

ou bien

$$\log\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{A_1}{a} + \frac{A_3}{a^3} + \ldots;$$

telle est la formule de Stirling, qui doit être complétée par un reste dont l'expression a été donnée (p. 421). En observant

que $A = \frac{1}{12}$ et en écrivant le reste après ce terme, on voit que ce reste est moindre que $\frac{1}{\pi^3 a^3}$ en valeur absolue ; si a est grand on peut évidemment le représenter par $\frac{-\varepsilon}{12a}$ et ε sera moindre que un : on a donc

$$\log\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1-\varepsilon}{12a}.$$

Si $a = 100$, l'erreur commise en négligeant le dernier terme sera moindre que $\frac{1}{1200}$; par suite presque négligeable, surtout si l'on observe que $\Gamma(a)$ est égal à $1.2.3\ldots 99$, on tire de la formule de Stirling

$$\Gamma(a) = a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a}\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1-\varepsilon}{12a}};$$

il en résulte cette formule

$$\frac{\Gamma(a)}{a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a}\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{1-\varepsilon}{12a}}$$

et, pour $a = \infty$,

$$\lim \frac{\Gamma(a)}{a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a}\sqrt{2\pi}} = 1.$$

En partant de là, on peut, comme l'a fait voir Serret, démontrer une formule analogue à celle de Stirling, mais convergente, due à Gudermann.

Pour a entier, on a

$$\lim \frac{a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a}\sqrt{2\pi}}{1.2.3\ldots(a-1)} = 1$$

et, en multipliant en haut et en bas par a,

$$\lim \frac{a^a \sqrt{2\pi a}\, e^{-a}}{1.2.3.4\ldots a} = 1.$$

Désignons par $\varphi(a)$ la quantité

$$\varphi(a) = \frac{a^a\sqrt{2\pi a}\, e^{-a}}{1.2.3\ldots a} \quad \text{ou} \quad \varphi(a) = \frac{a^a\sqrt{2\pi a}\, e^{-a}}{\Gamma(a+1)};$$

on aura

$$\log\varphi(a) - \log\varphi(a+1)$$
$$= -a\log\left(1+\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{a}\right) + 1,$$
$$\log\varphi(a+1) - \log\varphi(a+2)$$
$$= -(a+1)\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right) + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ajoutons, en observant que $\log\varphi(x)$ tend vers zéro pour $x=\infty$: nous trouverons

$$\log\varphi(a) - \log\varphi(a+n) = -\sum_0^n (a+n)\log\left(1+\frac{1}{a+n}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_0^n \log\left(1+\frac{1}{a+n}\right) + (n+1);$$

développant les logarithmes, on a

$$\log\varphi(a) - \log\varphi(a+n) = \frac{1}{2}\sum_0^n \frac{1}{a+n} \quad - \frac{1}{2}\sum_0^n \frac{1}{a+n}$$
$$-\frac{1}{3}\sum_0^n \frac{1}{(a+n)^2} + \frac{1}{4}\sum_0^n \frac{1}{(a+n)^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et, pour $n=\infty$,

$$\log\varphi(a) = -\frac{1}{12}\sum_0^\infty \frac{1}{(a+n)^2} + \ldots \pm \frac{p-1}{2p(p+1)}\sum_0^\infty \frac{1}{(a+n)^p} \mp \ldots;$$

d'où l'on tire la formule de Gudermann

$$\log\Gamma(a+1) = \left(a+\frac{1}{2}\right)\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi$$
$$+\frac{1}{12}\sum_0^\infty \frac{1}{(a+n)^2} + \ldots + \frac{p-1}{2p(p+1)}\sum_0^\infty \frac{1}{(a+n)^p} + \ldots.$$

XV. — Formes diverses de la fonction Γ.

Considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-z^x}\,dz;$$

si l'on y fait $z^x = \alpha$ ou $z = \alpha^{\frac{1}{x}}$, on a

$$dz = \frac{d\alpha}{x}\,\alpha^{\frac{1}{x}-1}$$

et

$$\int_0^\infty e^{-z^x}\,dz = \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\frac{d\alpha}{x}\,\alpha^{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{x}\,\Gamma\left(\frac{1}{x}\right);$$

ainsi l'on a

$$\frac{1}{x}\,\Gamma\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\infty e^{-z^x}\,dz = \Gamma\left(\frac{1}{x}-1\right).$$

Cette formule permet de calculer la valeur d'une intégrale définie que nous avons déjà rencontrée. Faisons en effet $x = 2$; nous aurons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz.$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Si, dans la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1}\,dz,$$

on fait $-z = \log\alpha$, on a

$$dz = -\frac{d\alpha}{\alpha}$$

et

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{\alpha}\right)^{x-1} d\alpha.$$

Cette forme a été souvent employée par Legendre.

On a

$$\frac{d^{n-1} e^x}{1.2.3\ldots(n-1)\,dx^{n-1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^z\,dz}{(z-x)^n};$$

si l'on fait alors $x = 0$, on a, pour toutes les valeurs entières et positives de n,

$$(1) \qquad \frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^z\,dz}{z^n},$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle quelconque décrit de l'origine comme centre. Maintenant laissons le contour d'intégration indéterminé et supposons n quelconque, enfin employons la notation $\frac{1}{\Gamma_1(n)}$ pour représenter le second membre de (1); si n est entier, $\Gamma_1(n) = \Gamma(n)$. En intégrant (1) par parties, on a

$$\frac{1}{\Gamma_1(n)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[\frac{e^z}{z^n} + n \int \frac{e^z\,dz}{z^{n+1}} \right];$$

si la partie intégrée $\frac{e^z}{z^n}$ disparaissait, on aurait

$$(2) \qquad \frac{1}{n\Gamma_1(n)} = \frac{1}{\Gamma_1(n+1)};$$

la fonction Γ_1 jouirait des propriétés de la fonction Γ; pour qu'il en soit ainsi, il suffit que l'origine du contour d'intégration soit à l'infini dans la direction des x négatifs.

Prenons alors pour contour d'intégration : 1° l'axe des x négatifs depuis le point $-\infty$ jusqu'au point $-\varepsilon$ infiniment voisin de l'origine; 2° un cercle de rayon ε décrit de l'origine comme centre; 3° l'axe des x négatifs depuis $-\varepsilon$ jusqu'à $-\infty$, nous aurons, au lieu de (1),

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma_1(n)} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^z\,dz}{z^n} + \int \frac{e^z\,dz}{z^n} + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{e^z\,dz}{z^n}\, e^{-2n\pi\sqrt{-1}};$$

la seconde intégrale est prise le long du cercle de rayon ε :

elle est nulle si l'on suppose $0 < n < 1$; la dernière a été multipliée par $e^{-2n\pi\sqrt{-1}}$, parce que, z effectuant une révolution dans le sens positif autour de l'origine, z^n est multiplié par $e^{2n\pi\sqrt{-1}}$. Supposons $0 < n < 1$, la formule précédente devient

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma_1(n)} = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^z\,dz}{z^n}\left(1 - e^{-2n\pi\sqrt{-1}}\right)$$

ou, changeant z en $-z$,

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma_1(n)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}\,dz}{z^n}\, e^{n\pi\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-2n\pi\sqrt{-1}}\right)$$

ou, divisant par $2\pi\sqrt{-1}$,

$$\frac{1}{\Gamma_1(n)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}\,dz}{z^n}\,\frac{\sin n\pi}{\pi},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\Gamma_1(n)} = \Gamma(1-n)\,\frac{\sin n\pi}{\pi}.$$

Or on a (p. 446)

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = \Gamma(1-n)\,\frac{\sin n\pi}{\pi}:$$

donc $\Gamma_1(n) = \Gamma(n)$ quand n est compris entre 0 et 1. Mais la formule (2) donne

$$\Gamma_1(n-1) = n\Gamma_1(n) = n\Gamma(n):$$

donc $\Gamma_1(n+1)$ est égal à $\Gamma(n+1)$, $\Gamma_1(n+2)$ est égal à $\Gamma(n+2)$, ...; donc enfin $\Gamma_1(n) = \Gamma(n)$, quel que soit n, et par suite on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int z^{-x}e^z\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour défini comme nous l'avons fait plus haut, ou de tout autre contour équivalent. Ce résultat a été obtenu par M. Heine.

On a

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-z}z^{x-1}\,dz;$$

on en déduit, en différentiant,

$$(3) \qquad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} \log z \, dz;$$

or on a

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zt}\, dt,$$

$$\log z = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-zt}) \frac{dt}{t};$$

(3) devient alors

$$\begin{aligned}\Gamma'(x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} (e^{-t} - e^{-zt}) \frac{dt}{t}\, dz \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t} \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz - \int_0^\infty e^{-z(1+t)} z^{x-1} dz \right) \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} \Gamma(x) - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\Gamma(x)}{(1+t)^x}\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x} \right].$$

Cette formule prend une forme plus élégante, en considérant l'intégrale qui y entre comme la limite de

$$\int_0^{\mathrm{R}} \frac{e^{-t}\, dt}{t} - \int_0^{\mathrm{R}} \frac{dt'}{t'(1+t')^x},$$

pour $\mathrm{R} = \infty$; et la seconde intégrale, en changeant $1 + t'$ en e^t, devient

$$\int_0^{\log(1+\mathrm{R})} \frac{e^{-tx}\, dt}{1 - e^{-t}};$$

on peut donc écrire

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim \left[\int_0^{\mathrm{R}} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) dt + \int_{\log(1+\mathrm{R})}^{\mathrm{R}} \frac{e^{-tx}\, dt}{1 - e^{-t}} \right].$$

L'intégrale singulière qui figure dans cette formule est nulle : donc

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

En intégrant par rapport à x depuis $x = 1$, on a

$$\log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)\frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t(1-e^{-t})}\right] dt.$$

XVI. — Discussion de la courbe $y = \Gamma(x)$.

Pour $x = 0, -1, -2, \ldots, \Gamma(x)$ est infini ; pour $x = 1$, $x = 2, 3, \ldots, \Gamma(x)$ est égal à $1, 2, 1.2, 1.2.3, \ldots$; on a

$$\frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx} = -C + x\left[\frac{1}{1.(x+1)} + \frac{1}{2.(x+2)} + \frac{1}{3.(x+3)} + \ldots\right].$$

En annulant le premier membre de cette équation, on aura une équation transcendante pour calculer les maxima et les minima de la fonction $\Gamma(x+1)$; cette équation sera

$$\frac{C}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{3(x+3)} + \ldots.$$

Il y a évidemment un minimum entre 0 et $+\infty$; car, pour $x = 0$ comme pour $x = \infty$, $\Gamma(x)$ est infini ; je dis qu'il n'y en a

Fig. 24.

qu'un seul ; en effet $\dfrac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}$ est toujours positif. Or, pour $x = 1$ et $x = 2$, $\Gamma(x)$ prend des valeurs égales à un : le minimum de $\Gamma(x)$, pour des valeurs positives de x, est donc compris entre 1 et 2 ; on trouve pour ce minimum

$$x = 1,4616321\ldots;$$
$$\Gamma(x) = 0,8856032\ldots,$$

l'équation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ permet de construire la courbe $y = \Gamma(x)$ pour des valeurs négatives de x, courbe qui a à peu

près la forme de la *fig.* 24. Je dis à peu près, parce que les distances relatives des diverses branches à l'axe des x n'ont pas pu être conservées.

XVII. — Analogie des puissances et des factorielles.

Kramp et Arbogast ont donné le nom de *factorielles* aux produits de facteurs en progression arithmétique, tels que

$$a(a+r)(a+2r)\ldots(a+\overline{n-1}.r);$$

ils désignent ce produit par la notation

$$a^{n|r}.$$

Il est clair que l'on a

$$a^{n|r} = a^{n+1}\left(1+\frac{r}{a}\right)\cdots\left(1+\overline{n-1}\,\frac{r}{a}\right)$$

$$= a^n\,\frac{\Gamma\left(n\,\frac{r}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{a}\right)},$$

et les factorielles se trouvent interpolées par les fonctions Γ. Vandermonde a donné une formule analogue à celle du binôme ; la voici :

$$(a+b)^{n|r} = a^{n|r} + \frac{n}{1}\,a^{n-1|r}\,b^{1|r} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2|r}\,b^{2|r} + \ldots;$$

elle est facile à vérifier si n est entier, et elle revient à la suivante :

$$(a+b)^n\,\frac{\Gamma\left(n\,\frac{r}{a+b}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{a+b}\right)}$$

$$= a^n\,\frac{\Gamma\left(n\,\frac{r}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{a}\right)} + \frac{n}{1}\,a^{n-1}\,b\,\frac{\Gamma\left(\overline{n-1}\,\frac{r}{a}\right)\Gamma\left(\frac{r}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{a}\right)\Gamma\left(\frac{r}{b}\right)}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\,a^{n-2}\,b^2\,\frac{\Gamma\left(\overline{n-2}\,\frac{r}{a}\right)\Gamma\left(2\,\frac{r}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{a}\right)\Gamma\left(\frac{r}{b}\right)} + \ldots.$$

La manière la plus simple de démontrer la formule de Vandermonde consiste à différentier n fois de suite l'identité

$$x^{a+b} = x^a x^b;$$

la formule de Leibnitz donne

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)\\ = a(a-1)\ldots(a-n+1) + \frac{n}{1}a(a-1)\ldots(a-n+2)b + \ldots,\end{aligned}$$

et en changeant a en $-\frac{a}{r}$ et b en $-\frac{b}{r}$, on a la formule de Vandermonde.

On peut généraliser cette formule en différentiant n fois de suite l'identité

$$x^{a+b+c} = x^a x^b x^c \ldots;$$

on a alors

$$(a+b+c\ldots)^{n|r} = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} a^{\alpha|r} b^{\beta|r} c^{\gamma|r} \ldots.$$

XVIII. — Développement de $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$ en factorielles.

Reprenons la formule d'interpolation de Newton

$$f(X) = f(x) + \frac{X-x}{1}\frac{\Delta f}{h} + \ldots + \frac{(X-x)\ldots(X-x-nh)}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(\xi).$$

Posons $h = 1$ et $f(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$, on aura

$$\frac{d\log\Gamma(x+1)}{d(x+1)} - \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \Delta f = \frac{1}{x},$$

$$\Delta^2 f = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)},$$

$$\Delta^3 f = \frac{-1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)},$$

$$\begin{aligned}\Delta^4 f &= \frac{1.2}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{-1.2.3}{x(x+1)(x+2)(x+3)},\end{aligned}$$

. . . .

il en résulte

$$\frac{d\log\Gamma(\mathrm{X})}{d\mathrm{X}} - \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \frac{\mathrm{X}-x}{x} - \frac{(\mathrm{X}-x)(\mathrm{X}-x-1)}{2x(x+1)} + \ldots.$$

Quant au reste, il tend vers zéro $\left[\text{car la dérivée } n^{\text{ième}} \text{ de } \frac{d\log\Gamma(x)}{dx}\right.$ est de la forme $\left.\sum \frac{1}{x^n}\right]$ quand $\mathrm{X}-x$ est moindre que x; si l'on fait $\mathrm{X}-x=a$, $\mathrm{X}=x+a$, on a

$$\frac{d\log\Gamma(x+a)}{dx} - \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \frac{a}{x} - \frac{a(a-1)}{2x(x+1)} + \frac{a(a-1)(a-2)}{3x(x+1)(x+2)} \ldots;$$

en divisant par a et en faisant $a=0$, il vient

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x(x+1)} + \frac{1.2}{3x(x+1)(x+2)} + \ldots.$$

XIX. — Calcul de la constante d'Euler.

Nous avons indiqué plus haut le moyen de calculer la constante d'Euler; mais, comme cette constante joue dans la théorie des fonctions Γ un rôle analogue à celui que la constante π joue dans la théorie des fonctions circulaires, il ne sera pas mauvais d'indiquer plusieurs méthodes pour le calcul de cette constante.

Première méthode. — En intégrant la formule qui donne $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$, on a

$$\log\Gamma(x) = -\mathrm{C}x + [x - \log(1+x)] + \left[\frac{x}{2} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] + \ldots;$$

en faisant $x=1$, on a

$$0 = -\mathrm{C} + (1 - \log 2) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{C} = (1 - \log 2) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \log\frac{4}{3}\right) + \ldots.$$

Deuxième méthode. — On peut partir de la formule

$$\log\Gamma(x) = -\log x - Cx + s_2\frac{x^2}{2} - s_3\frac{x^3}{3} + \ldots;$$

en changeant x en $1-x$, on a

$$\log\Gamma(1-x) = -\log(1-x) - C(1-x) + s_2\frac{(1-x)^2}{2} - \ldots;$$

en ajoutant, il vient

$$\log\Gamma(1-x)\Gamma(x) = -\log x(1-x) - C + \frac{s_2}{2}[x^2+(1-x)^2] - \ldots$$

ou bien

$$\log\frac{\pi}{\sin\pi x} = -\log x(1-x) - C + \frac{s_2}{2}[x^2+(1-x)^2] - \ldots;$$

en faisant $x = \frac{1}{2}$, on a

$$C = 2\log 2 - \log\pi + \frac{s_2}{2}\,\frac{1}{2} - \frac{s_3}{3}\,\frac{1}{2^2} + \frac{s_4}{4}\,\frac{1}{2^3} - \ldots.$$

Troisième méthode. — Reprenons la formule

$$\log\Gamma(1+x) = -Cx + s_2\frac{x^2}{2} - s_3\frac{x^3}{3} + \ldots,$$

on a

$$0 = -\log(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

et, en ajoutant,

$$(1)\quad \begin{cases} \log\Gamma(1+x) = -\log(1+x) + (1-C)x \\ \qquad\qquad - (1-s_2)\dfrac{x^2}{2} + (1-s_3)\dfrac{x^3}{3} - \ldots, \end{cases}$$

série déjà plus convergente; mais on a

$$x\Gamma(x) = \Gamma(1+x) \quad \text{et} \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

par suite

$$\Gamma(1-x)\Gamma(1+x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x},$$

donc

$$(2)\qquad \log\Gamma(1-x)+\log\Gamma(1+x)=\log\pi x-\log\sin\pi x.$$

Or de (1) on tire

$$\log\Gamma(1-x)=-\log(1-x)-(1-C)x-(1-s_2)\frac{x^2}{2}-\ldots;$$

en retranchant de (1) on a

$$\log\Gamma(1+x)-\log\Gamma(1-x)=\log\frac{1-x}{1+x}+2(1-C)x+2(1-s_3)\frac{x^3}{3}+\ldots$$

et, en éliminant $\Gamma(1-x)$ au moyen de (2),

$$\log\Gamma(1+x)=\frac{1}{2}\log\pi x-\frac{1}{2}\log\sin\pi x+\frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x}$$
$$+(1-C)x+(1-s_3)\frac{x^3}{3}+(1-s_5)\frac{x^5}{5}+\ldots;$$

on tire de là C, en faisant $x=1$, et mieux en faisant $x=-\frac{1}{2}$ et en se rappelant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$; on a alors

$$\frac{1}{2}\log\pi=\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}(1-C)-(1-s_3)\frac{1}{3.2^3}-\ldots$$

ou bien

$$0=-\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}(1-C)-\ldots$$

ou

$$1-C=\log\frac{3}{2}+(s_3-1)\frac{1}{3.2^2}+(s_5-1)\frac{1}{5.2^4}+\ldots.$$

série très convergente.

Quatrième méthode. — On a

$$-C=\left(\log m-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{m}\right)_{m=\infty}.$$

Nous allons prouver que le second membre a une limite et que C existe, ce qui n'était peut-être pas assez rigoureusement établi jusqu'ici. On a

$$(1)\qquad \frac{1}{m}=\int_0^\infty e^{-mx}\,dx,$$

donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m} &= \int_0^\infty (e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-mx})\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx(1-e^{-mx}). \end{aligned}\right.$$

Intégrons (1) depuis 1 jusqu'à m : nous aurons

$$\log m = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-mx}}{x}\,dx;$$

on en conclut

$$\begin{aligned} &\log m - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{m} \\ &\quad = \int_0^\infty \left[e^{-mx}\left(-\frac{1}{x}+\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)+\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right]dx. \end{aligned}$$

Il faut maintenant faire $m=\infty$; on a alors

$$-C = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)dx$$

ou

$$C = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx.$$

La formule d'Euler (p. 418) fait connaître la constante d'Euler, et, en effet, en faisant dans cette formule

$$f(x)=\frac{1}{x},\qquad a=1,\qquad b=m+1,\qquad h=1,$$

on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}+\frac{1}{2(m+1)} \\ &\quad = \int_1^{m+1}\frac{dx}{x}+A_1\left[-\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{1}\right]+\ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m+1}-\log(m+1) \\ &\quad = \frac{1}{2}+\frac{1}{2(m+1)}+\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{(m+1)^2}\right]A_1 \\ &\quad\quad +\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{(m+1)^4}\right]A_2\,1.2.3+\ldots. \end{aligned}$$

Si, dans cette formule, on remplace $m+1$ par m, on trouve

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\log m \\ & \quad = 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2}B_2\left(1-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{1}{4}B_4\left(1-\frac{1}{m^4}\right) \\ & \qquad +\frac{1}{6}B_6\left(1-\frac{1}{m^6}\right)\ldots, \end{aligned} \right.$$

et, bien que le second membre ne soit pas convergent, quand on fait $m=\infty$, on obtient la constante d'Euler avec une certaine approximation que l'étude du reste peut faire connaître. Si, par exemple, on s'arrête au terme en B_4, le reste sera moindre que le terme suivant ou que $\frac{1}{6.42}=\frac{1}{252}$. Quoi qu'il en soit, la formule précédente peut permettre de calculer avec une grande rapidité la somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}$ quand m est un grand nombre. Il suffit pour cela de calculer directement, par exemple, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}$ et de retrancher de la formule (1) celle que l'on obtient en y faisant $m=10$; on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{m}-\log\frac{m}{10} \\ & \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}B_2\left(\frac{1}{10^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\ldots, \end{aligned}$$

formule très convergente, au moins dans ses premiers termes, car elle finira toujours par diverger. Mais, quand on tient compte du reste, on voit d'abord qu'il est très petit et l'on peut faire usage de la formule d'Euler comme si elle était convergente, ce qui est assez remarquable.

XX. — Intégration par les fonctions Γ.

1° L'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^a}dx$ se ramène aux fonctions Γ en posant $x^a=z$, $x=z^{\frac{1}{a}}$ et $dx=\frac{1}{a}z^{\frac{1}{a}-1}dz$; on a alors

$$\int_0^\infty e^{-x^a}dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-z}z^{\frac{1}{a}-1}dz=\frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

2° Les intégrales de la forme

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

étudiées par Binet surtout, et d'abord par Euler et Legendre, se ramènent aux fonctions Γ comme il suit :

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx,$$

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x'} x'^{q-1}\,dx';$$

multiplions membre à membre ces deux intégrales, nous aurons

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+x')} x^{p-1} x'^{q-1}\,dx\,dx';$$

posons $x' = tx$, $dx' = x\,dt$, nous trouverons

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x(1+t)} x^{p+q-1} t^{q-1}\,dx\,dt$$

ou

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x(1+t)} x^{p+q-1}(1+t)^{p+q-1}\,d[(1+t)x]\,\frac{t^{q-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}}$$

ou, en intégrant par rapport à x,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \Gamma(p+q)\,\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

ou

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt.$$

Or, si l'on fait

$$t = \frac{z}{1-z}, \qquad dt = \frac{dz}{(1-z)^2}, \qquad \frac{t}{1+t} = z, \qquad 1+t = \frac{1}{1-z},$$

on a

$$\int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \int_0^1 z^{q-1}(1-z)^{p-1}\,dz = B(p, q);$$

il en résulte que

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

On a donc

$$B(p, q) = B(q, p).$$

L'intégrale $B(p, q)$ est connue sous le nom d'intégrale *eulérienne* de *première espèce;* la fonction Γ était, d'après Legendre, l'intégrale de *seconde espèce.*

3° Considérons l'intégrale

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x \, dx;$$

posant $\sin x = y$, on a

$$\cos x \, dx = dy$$

et

$$u = \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{m-2}{2}} y^{n-1} \, dy;$$

faisant $y^2 = x$, $2y\,dy = dx$, il vient

$$u = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^{\frac{m-2}{2}} x^{\frac{n-2}{2}} \, dx$$

ou

$$u = \frac{1}{2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

4° L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n} dx$ peut s'obtenir au moyen des fonctions Γ, lorsque n est compris entre 1 et 2. On a en effet

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx$$

et, en changeant x en tx,

$$\frac{\Gamma(n)}{x^n} = \int_0^\infty e^{-tx} t^{n-1} \, dt;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{n-1}\, dt$$

et, par suite, en intégrant de $x = 0$ à $x = \infty$, après avoir multiplié par $\sin bx$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin bx\, t^{n-1}\, dx\, dt.$$

Mais on a

$$\int_0^{\infty} \sin bx\, e^{-tx}\, dx = \frac{b}{t^2 + b^2},$$

donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n}\, dx = \frac{b}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}\, dt}{t^2 + b^2};$$

posant $\frac{t^2}{b^2} = \theta$, il vient,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n}\, dx = \frac{b^{n-1}}{2\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{\frac{n}{2}-1}}{1+\theta}\, d\theta$$

ou, en vertu de la formule de la page 256,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n}\, dx = \frac{b^{n-1}}{2\Gamma(n)} \frac{\pi}{\sin \frac{n\pi}{2}}.$$

La même méthode permet d'évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^n}\, dx,$$

quand n est compris entre 0 et 1. D'ailleurs, si l'on différentie dans cette hypothèse la formule précédente par rapport à b, on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^{n-1}}\, dx = \frac{(n-1)b^{n-2}}{2\Gamma(n)} \frac{\pi}{\sin \frac{n\pi}{2}};$$

et, changeant n en $n+1$, puis observant que

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

il vient

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{2\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}};$$

bien entendu, il faut supposer n compris entre zéro et l'unité, sans quoi, du reste, le premier membre de cette équation aurait une valeur indéterminée.

5° Nous allons montrer maintenant comment, en combinant la méthode de Cauchy avec la théorie des intégrales eulériennes, on peut trouver la valeur de quelques intégrales définies.

Considérons l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(z-\alpha\sqrt{-1})^a(z-\beta\sqrt{-1})^b},$$

où α et β sont positifs et où a et b sont positifs également, mais où l'on suppose $a < 1$. Décrivons autour du point $\alpha\sqrt{-1}$ un petit cercle $mnpn'$, puis intégrons le long du contour

Fig. 25.

$x'omnpy$, x' et y étant censés à l'infini, nous aurons pour résultat zéro ; donc

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-\alpha\sqrt{-1})^a(x-\beta\sqrt{-1})^b} \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{dy}{(y-\alpha)^a(y-\beta)^b}\,\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}^a\sqrt{-1}^b} = 0, \end{aligned}\right.$$

$\sqrt{-1}^a$ et $\sqrt{-1}^b$ désignant deux valeurs quelconques des expressions $\cos a\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+\sqrt{-1}\sin a\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdots$. Intégrons ensuite le long du contour infini dans les deux sens $ypn'mox$, nous aurons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{\infty}^{0} \frac{dy}{(y-\alpha)^a(y-\beta)^b}\,\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}^a\sqrt{-1}^b} \\ &+\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha\sqrt{-1})^a(x-\beta\sqrt{-1})^b}=0.\end{aligned}\right.$$

La valeur de $\sqrt{-1}^b$ est restée la même ; mais, si nous voulons que la valeur de $(x-\alpha\sqrt{-1})^a$ soit la même pour $x=0$ dans les deux formules (1), (2), il ne faudra pas adopter les mêmes valeurs de $\sqrt{-1}^a$; de o en m, cette valeur doit être la même, mais, à partir du point p, l'une d'elles étant v, l'autre sera $ve^{2\pi a\sqrt{-1}}$, de sorte que, si l'on ajoute les formules (1) et (2), on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha\sqrt{-1})^a(x-\beta\sqrt{-1})^b} + \frac{(1-e^{-2\pi a\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}^a\sqrt{-1}^b}\int_\alpha^\infty\frac{dy}{(y-\alpha)^a(y-\beta)^b}=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(-\alpha-x\sqrt{-1})^a(\beta-x\sqrt{-1})^b} - 2\,\frac{\sin a\pi}{e^{\pi a\sqrt{-1}}}\int_\alpha^\infty\frac{dy}{(y-\alpha)^a(y-\beta)^b}=0.$$

On peut supposer que la valeur de $\sqrt{-1}^a$ adoptée soit

$$e^{\frac{\pi}{2}a\sqrt{-1}};$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(\alpha-x\sqrt{-1})^a(\beta-x\sqrt{-1})^b} = 2\sin a\pi\int_\alpha^\infty\frac{dy}{(y-\alpha)^a(y-\beta)^b};$$

posant $y = \alpha + x$ dans le deuxième membre, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha + x\sqrt{-1})^a(\beta - x\sqrt{-1})^b} \\ &\quad = 2\sin a\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(x + \alpha + \beta)^b}; \end{aligned}\right.$$

et cette formule est vraie, même pour $a > 1$, comme on peut s'en assurer en différentiant par rapport à α. Or on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(x + \alpha + \beta)^b} &= (\alpha + \beta)^{-(a+b-1)} \int_0^{\infty} \frac{dx \,.\, x^{-a}}{(1 + x)^b} \\ &= (\alpha + \beta)^{-(a+b-1)} \frac{\Gamma(a + b - 1)\Gamma(1 - a)}{\Gamma(b)}; \end{aligned}$$

portant cette valeur dans (3) et observant que $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ est égal à $\Gamma(a)\Gamma(1 - a)$,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha + x\sqrt{-1})^a(\beta - x\sqrt{-1})^b} \\ &\quad = 2\pi(\alpha + \beta)^{-(a+b-1)} \frac{\Gamma(a + b - 1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \omega. \end{aligned}$$

Au contraire il est évident que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha + x\sqrt{-1})^a(\beta + x\sqrt{-1})^b} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha - x\sqrt{-1})^a(\beta - x\sqrt{-1})^b} = 0;$$

de ces trois dernières formules on tire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha + x\sqrt{-1})^a} \left[(\beta - x\sqrt{-1})^{-b} + (\beta + x\sqrt{-1})^{-b}\right] dx = \omega, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\beta - x\sqrt{-1})^b} \left[(\alpha + x\sqrt{-1})^{-a} + (\alpha - x\sqrt{-1})^{-a}\right] dx = \omega. \end{aligned}\right.$$

La valeur de ω étant symétrique en α, β et a, b, on peut

changer a en b, b en a, α en β et β en α; en supposant alors $b < 1$, on a, au lieu de la dernière formule,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha - x\sqrt{-1})^a}\left[(\beta - x\sqrt{-1})^{-b} + (\beta + x\sqrt{-1})^{-b}\right] = \omega;$$

de cette formule et de (4) on tire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\beta + x\sqrt{-1})^{-b} + (\beta - x\sqrt{-1})^{-b}\right] \times \left[(\alpha + x\sqrt{-1})^{-a} + (\alpha - x\sqrt{-1})^{-a}\right] dx = 2\omega;$$

faisons $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $x = \operatorname{tang}\varphi$, et nous aurons

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left[(1 + \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1})^{-b} + (1 - \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1})^{-b}\right] \times \left[(1 + \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1})^{-a} + (1 - \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1})^{-a}\right] \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 2\omega$$

ou

$$(5) \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{a+b-2}\varphi \cos b\varphi \cos a\varphi \, d\varphi = \frac{\omega}{2};$$

on trouve d'une façon toute semblable

$$(6) \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{a+b-2}\varphi \sin b\varphi \sin a\varphi \, d\varphi = \frac{\omega}{2};$$

les formules (5) et (6) ajoutées donnent

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{a+b-2}\varphi \cos(b - a)\varphi \, d\varphi = \omega.$$

Posant $a + b - 2 = p$, $b - a = q$, on a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi \, d\varphi = \omega = \pi 2^{-p} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)}$$

ou encore

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)}.$$

6° Je suppose qu'il s'agisse d'obtenir l'intégrale

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} \cos bx \, dx$$

ou

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} \sin bx \, dx,$$

le signe de a étant mis en évidence; il est clair que les deux intégrales s'obtiendront à la fois si l'on peut calculer

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax+bx\sqrt{-1}} \, dx.$$

Cette intégrale est prise le long de l'axe des x; si, dans l'angle des coordonnées positives, on mène une droite quelconque, on pourra intégrer le long de cette droite; car, si l'on ferme le contour formé de cette droite et de l'axe des x par un arc de cercle de rayon infini, le secteur ainsi formé ne contiendra pas d'infini de $x^m e^{-ax+bx\sqrt{-1}}$ et l'intégrale prise le long de l'arc est nulle. Soit donc

$$x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \qquad dx = dr\, e^{\theta\sqrt{-1}},$$
$$-a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi).$$

Nous intégrerons alors le long de la droite faisant l'angle θ avec l'axe des x, et nous trouverons

$$\int_0^\infty x^m e^{(-a+b\sqrt{-1})x} \, dx = e^{(m+1)\theta\sqrt{-1}} \int_0^\infty r^m e^{\rho r[\cos(\theta+\varphi)+\sqrt{-1}\sin(\theta+\varphi)]} \, dr;$$

l'angle φ est situé dans le troisième ou le quatrième quadrant,

puisque son cosinus est négatif. Prenons $\theta + \varphi = \pi$, nous aurons

$$\int_0^\infty x^m e^{(-a+b\sqrt{-1})x}\,dx$$

$$= e^{(m+1)(\pi-\varphi)\sqrt{-1}} \int_0^\infty r^m e^{-\rho r}\,dr$$

$$= e^{(m+1)(\pi-\varphi)\sqrt{-1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\rho^{m+1}}.$$

En séparant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on a

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} \cos bx\,dx = \cos(m+1)(\pi-\varphi)\frac{\Gamma(m+1)}{\rho^{m+1}},$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} \sin bx\,dx = \sin(m+1)(\pi-\varphi)\frac{\Gamma(m+1)}{\rho^{m+1}}.$$

XXI. — Formule de Dirichlet.

Proposons-nous d'évaluer l'intégrale multiple

$$\int\int\int \ldots x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n,$$

les variables étant assujetties à vérifier les relations

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n \geq 0.$$

L'intégrale en question peut s'écrire

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \ldots x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1};$$

or on a

$$\int_0^1 x_1^{m_1-1}\,dx_1 = \frac{1}{m_1} = \frac{\Gamma(m_1)}{\Gamma(m_1+1)};$$

on a ensuite

$$\int_0^1 x_1^{m_1-1}\,dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{m_2-1}\,dx_2 = \int_0^1 x_1^{m_1-1}(1-x_1)^{m_2}\,dx_1 \frac{\Gamma(m_2)}{\Gamma(m_2+1)}.$$

L'intégrale simple qui figure dans cette formule n'est autre que $B(m_1, m_2+1)$ ou $\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(m_1+m_2+1)}$: on a donc

$$\int\int x^{m_1-1}x^{m_2-1}\,dx_1\,dx_2 = \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}{\Gamma(m_1+m_2+1)};$$

cette formule est générale et l'on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int\int\ldots x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\\ &\quad = \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\ldots+m_n+1)}.\end{aligned}\right.$$

En effet, admettons cette formule et cherchons la valeur de

$$\int\int\ldots x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

quand on y suppose

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x_1+x_2+\ldots+x_n < h,\\ &x_1 > 0,\quad x_2 > 0,\quad \ldots,\quad x_n > 0;\end{aligned}\right.$$

c'est supposer

$$(4)\quad \frac{x_1}{h}+\frac{x_2}{h}+\ldots+\frac{x_n}{h} < 1;$$

l'intégrale

$$\int\int\ldots\frac{x_1^{m_1-1}}{h^{m_1-1}}\,\frac{x_2^{m_2-1}}{h^{m_2-1}}\ldots\frac{dx_1}{h}\,\frac{dx_2}{h}\ldots,$$

prise avec la condition (4), est donc

$$\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\ldots+m_n+1)};$$

par suite, l'intégrale cherchée est

$$h^{m_1+m_2+\ldots+m_n}\,\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\ldots+m_n+1)}.$$

Ceci posé, l'intégrale

$$\int_0^{1-x_1}\int_0^{1-x_1-x_2}\cdots\int_0^{1-x_1-x_2-\ldots-x_{n+1}} x_2^{m_2-1}\ldots x_{n+1}^{m_{n+1}-1}\,dx_2\ldots dx_{n+1}$$

sera égale à

$$(1-x_1)^{m_2+m_3+\ldots+m_{n+1}}\frac{\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n+1})}{\Gamma(m_2+m_3+\ldots+m_{n+1}+1)};$$

l'intégrale

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\ldots x_1^{m_1-1}\ldots x_{n+1}^{m_{n+1}-1}\,dx_1\ldots dx_{n+1},$$

c'est-à-dire l'intégrale

$$\int\int\int\ldots x_1^{m_1-1}\ldots x_{n+1}^{m_{n+1}-1}\,dx_1\ldots dx_{n+1},$$

prise avec la condition

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}<1,$$

$$x_1>0,\qquad x_2>0,\qquad \ldots,\qquad x_{n+1}>0,$$

sera donc égale à

$$\int_0^1(1-x_1)^{m_2+m_3\ldots+m_{n+1}}x_1^{m_1-1}\,dx_1\,\frac{\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n+1})}{\Gamma(m_2+m_3+\ldots+m_{n+1}+1)},$$

c'est-à-dire, en observant que l'intégrale, abstraction faite du facteur qui suit dx_1, est $B(m_2+\ldots+m_{n+1}, m_1)$, à

$$\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n+1})}{\Gamma(m_1+m_2+\ldots+m_{n+1}+1)}.$$

Si donc on admet la formule (2) démontrée pour $n=1$ et $n=2$, on voit qu'elle a encore lieu quand n augmente d'une unité : elle est donc générale.

Maintenant proposons-nous d'évaluer l'intégrale

$$\int\int\int\ldots x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

avec la condition

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n} < 1,$$

$x_1, x_2, \ldots$ étant tous positifs.

Posons $\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{p_i} = z_i$, l'intégrale cherchée deviendra

$$\int\int\int \ldots \Pi \frac{a_i^{m_i} z^{\frac{m_i}{p_i}-1}}{p_i} dx_i,$$

avec la condition

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n < 1.$$

Sa valeur sera donc

$$\frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}}{p_1 p_2 \ldots p_n} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{p_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} + \ldots + \frac{m_n}{p_n} + 1\right)}.$$

Application. — La développée de l'ellipse a pour équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

ou

(1) $$\left(\frac{a}{c^2}x\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c^2}y\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

son aire est

$$\int\int dx\,dy,$$

prise avec la condition (1), ou plutôt cette intégrale est le quart de l'aire en question; en vertu du théorème de Dirichlet, le quart de cette aire sera donc

$$\frac{9c^4}{ab.4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{9}{4}\frac{c^4}{ab}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{1.2.3}$$

ou bien $\frac{3}{32}\frac{c^4}{ab}\pi$, et l'aire totale sera $\frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab}$.

L'aire de l'épicycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$, enveloppe d'une droite

de longueur constante qui s'appuie sur deux droites rectangulaires, sera alors $\frac{3}{8}\pi l^2$, ...

XXII. — Les fonctions de M. Prym.

La fonction $\Gamma(x)$, étant mise sous la forme

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{x-1}\,dz = \Gamma(x),$$

peut se décomposer en deux autres

$$P(x) = \int_0^1 e^{-z} z^{x-1}\,dz \qquad \text{et} \qquad Q(x) = \int_1^\infty e^{-z} z^{x-1}\,dz.$$

Étudions d'abord la fonction $P(x)$, l'intégration par parties donne

$$(1) \qquad P(x) = e^{-1}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \dots\right];$$

la fonction, partout synectique excepté aux points 0, -1, -2, ...,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \dots,$$

peut donc être représentée par une intégrale définie. Il est clair que l'on a

$$P(x+1) = xP(x) - e^{-1}.$$

Or on a

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right),$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right),$$

....,

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{x} - \frac{n}{1}\frac{1}{x+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{x+2} - \dots\right],$$

Portant ces valeurs dans (1), on trouve

$$(2)\qquad P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{x+3} + \ldots;$$

la fonction P peut être définie dans toute l'étendue du plan par l'une des formules (1), (2); quant à la fonction Q, rien n'empêche de la définir par l'équation

$$\Gamma(x) = P(x) + Q(x).$$

Ces définitions sont alors plus précises que celles qui sont fournies par des intégrales définies. On a

$$Q(x+1) = xQ(x) + e^{-1}.$$

(Prym, *Journal de Crelle*, t. 82.)

XXIII. — Du logarithme intégral.

On appelle *logarithme intégral* et l'on désigne par le symbole $\text{li}\,x$ l'intégrale

$$(1)\qquad \text{li}\,x = \int_0^x \frac{dx}{\log x}.$$

Cette formule peut être remplacée par la suivante

$$\text{li}\,x = \int_0^x \frac{d\zeta}{\log \zeta},$$

et, si l'on pose $\zeta = e^u$,

$$\text{li}\,x = \int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^u\,du}{u}.$$

Si l'on fait alors $e^{-\xi} = x$, on trouve

$$\text{li}\,e^{-\xi} = \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{e^u\,du}{u}$$

ou bien

$$\text{li}\,e^{-\xi} = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u};$$

on a alors

$$\operatorname{li} e^{-x} - \operatorname{li} e^{-\xi} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u} - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u}$$

ou

$$\operatorname{li} e^{-x} - \operatorname{li} e^{-\xi} = \int_{\xi}^{x} \frac{e^{-u}\,du}{u}.$$

On développe facilement le second membre en série, et l'on a

$$\begin{aligned}\operatorname{li} e^{-x} - \operatorname{li} e^{-\xi} = {} & \log x - \frac{1}{1}\frac{x}{1} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{2} - \ldots \\ & - \log \xi + \frac{1}{1}\frac{\xi}{1} - \frac{1}{1.2}\frac{\xi^2}{2} + \ldots,\end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$\operatorname{li} e^{-x} - \log x + \frac{x}{1} - \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{2} + \ldots = \text{const.} = \mathrm{C}$$

ou bien

$$(2) \qquad \operatorname{li} e^{-x} = \mathrm{C} + \log x - \frac{x}{1} + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{1.2.3}\frac{x^3}{3} + \ldots;$$

mais on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1 - e^{-u\xi}}{u}\,du &= \int_0^1 \left(\xi - \frac{u}{1.2}\xi^2 \ldots\right) du \\ &= \xi - \frac{1}{1.2}\frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{\xi^3}{3} - \ldots;\end{aligned}$$

on peut donc écrire

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned}\mathrm{C} &= \operatorname{li} e^{-\xi} - \log \xi + \int_0^1 \frac{1 - e^{-u\xi}}{u}\,du \\ &= \operatorname{li} e^{-\xi} - \log \xi + \int_0^1 \frac{1 - (1-u)^{\xi}}{u}\,du \\ &\qquad - \int_0^1 \frac{e^{-\xi u} - (1-u)^{\xi}}{u}\,du.\end{aligned}\right.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1 - (1-u)^{\xi}}{u}\,du &= \int_0^1 \frac{1 - (1-u)^{\xi}}{1 - (1-u)}\,du \\ &= \int_0^1 [1 + (1-u) + \ldots]\,du = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\xi};\end{aligned}$$

(3) devient alors

$$(4)\quad C = \mathrm{li}\, e^{-\xi} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\xi} - \log\xi - \int_0^1 \frac{e^{-\xi u} - (1-u)^{\xi}}{u}\, du.$$

Faisons ensuite $\xi = \infty$, $\mathrm{li}\, e^{-\xi}$ se réduira à zéro; cherchons la limite de

$$\int_0^1 \frac{e^{-\xi u} - (1-u)^{\xi}}{u}\, du;$$

à cet effet, posons $u\xi = v$: nous aurons

$$\int_0^{\xi} \frac{e^{-v} - \left(1 - \frac{v}{\xi}\right)^{\xi}}{v}\, dv;$$

or on sait que

$$\left(1 - \frac{v}{\xi}\right)^{\xi} = e^{-v} - \frac{1}{2\xi}\left(\frac{\theta_0 v^2}{1.2} + \frac{\theta_1 v^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

θ_0, θ_1, ... désignant des quantités moindres que un en valeur absolue $\Big[$c'est ainsi que l'on prouve que $\left(1 - \frac{v}{\xi}\right)^{\xi}$ a pour limite $e^{-v}\Big]$; l'intégrale en question a donc pour limite zéro, et la formule (4) donne

$$C = \lim\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\xi} - \log\xi\right),$$

c'est-à-dire que la constante C est précisément la constante d'Euler. La formule (2) permet alors de dresser une Table de la fonction $\mathrm{li}\, e^{-x}$, et même de concevoir cette fonction pour des valeurs imaginaires ou positives de $-x$.

Pour de grandes valeurs de x, on intégrera par parties, et l'on aura

$$\mathrm{li}\, x = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \ldots\right).$$

Cette série finit par diverger, mais elle converge dans ses premiers termes, et l'erreur qui s'obtient sous forme d'intégrale définie permet d'apprécier le degré d'approximation

obtenu, approximation toujours suffisante pour les besoins de la pratique.

Soldner (Munich, 1809) a construit deux Tables du logarithme intégral (*voir* un Mémoire de Bretschneider, *Crelle*, t. 17, 1837).

XXIV. — Calcul des dérivées à indices quelconques.

« La première idée du calcul des différentielles à indices quelconques appartient à Leibnitz. Euler ensuite a écrit sur ce sujet quelques pages que Lacroix rappelle dans son *Traité de Calcul différentiel*. On trouve également trois ou quatre lignes qui s'y rapportent dans l'Ouvrage de Laplace sur les probabilités. Fourier enfin, dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, indique une formule générale qu'il regarde comme propre à transformer en intégrales doubles les différentielles à indices quelconques. » (Liouville.)

Mais c'est à Liouville que l'on doit d'avoir montré tout le parti que l'on pouvait tirer du Calcul différentiel généralisé; ses principaux Mémoires sont insérés au XXI[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Pour les géomètres que nous venons de citer, si l'on a

$$f(x) = \mathrm{A}e^{\alpha x} + \mathrm{B}e^{\beta x} + \ldots,$$

A, B, ... α, β, ... désignant des constantes, on a

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \mathrm{A}\alpha^n e^{\alpha x} + \mathrm{B}\beta^n e^{\beta x} + \ldots;$$

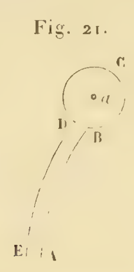
cette formule, vraie pour n entier, est étendue au cas où n est quelconque, et sert de définition au premier membre.

On peut généraliser la notion de dérivée d'une autre manière qui ne suppose pas la fonction f développable en une série d'exponentielles.

On appelle *lacet* un contour formé d'une ligne droite ou courbe allant d'un point A, appelé *origine* ou *entrée* du

lacet, en un point B infiniment voisin de ce que l'on appelle *point critique a* du lacet, puis d'une portion de cercle BD ayant son centre en a et que l'on appelle *cercle* du lacet, et revenant du point D infiniment voisin de B en un point E

Fig. 21.



infiniment voisin de A que l'on appelle la *sortie* du lacet; AB et EB sont les *bords* du lacet, ils sont supposés infiniment voisins sans se couper.

Nous appellerons *dérivée d'ordre n* de la fonction monogène $f(z)$ *prise à partir de la limite* x_0 l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

prise le long d'un lacet à bords rectilignes ayant son entrée au point x_0 et son cercle décrit autour du point x comme centre.

La dérivée d'une fonction $f(z)$, comme l'on voit, n'est pas en général monodrome autour du point x_0; ses diverses valeurs, qui peuvent être en nombre infini si le nombre n est incommensurable, se permutent les unes dans les autres autour du point x_0, qui est un point critique.

Lorsque le nombre n est négatif, la définition que nous venons de donner se confond avec celle qui a été donnée par M. Letnikof, en 1874, dans un journal russe. Alors l'intégrale prise le long du cercle du lacet est nulle; sa valeur, prise le long du premier bord, est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}};$$

sa valeur, prise le long du second bord, est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x}^{x_0}\frac{f(z)\,e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}}}{(z-x)^{n+1}}\,dz.$$

La présence du facteur exponentiel tient à ce que le point z a tourné autour du point critique x : la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ est donc

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\left(1-e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}}\right)\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

ou bien

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\left(e^{(n+1)\pi\sqrt{-1}}-e^{-(n+1)\pi\sqrt{-1}}\right)\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}$$

ou bien

$$\Gamma(n+1)\frac{\sin(n+1)\pi}{\pi}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}};$$

en observant que (p. 446)

$$\Gamma(n+1)\Gamma(-n)=\frac{\pi}{\sin(n+1)\pi},$$

cette expression devient

$$(2)\qquad \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}.$$

C'est cette formule que M. Letnikof avait adoptée pour définir la dérivée $n^{\text{ième}}$ dans le cas où n est négatif.

Nous désignerons par

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

la dérivée d'ordre n de $f(x)$ prise à partir de x_0 :

1° Si n est entier et positif, l'expression (1) se réduit bien, en vertu du calcul des résidus, à $f^n(x)$ (p. 246), car les intégrales prises le long des bords du lacet se détruisent.

2° Si n est entier et négatif, l'expression (2) de la dérivée se réduit à l'intégrale d'ordre n de la fonction $f(x)$ prise entre les limites x_0 et x.

3° La dérivée d'ordre n dépend en général de la limite x_0, mais elle en est indépendante quand n est entier et positif.

XXV. — Dérivées de diverses fonctions.

On simplifie la recherche des dérivées au moyen des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si α est un nombre entier et positif, on a*

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \int_{x_0}^{x}\frac{d^{n+\alpha} f(x)}{dx^{n+\alpha}},$$

ce dont on s'assure en appliquant les règles de la différentiation sous le signe $\int$ à la formule

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Théorème II. — *On a, en général,*

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f(x)}{dx^n} - \int_{x'_0}^{x}\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x'_0}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}.$$

Ce théorème sert à changer la limite à partir de laquelle on prend une dérivée.

Supposons que les points x_0, x et x'_0 forment un triangle ne contenant pas de point critique de $f(z)$, le lacet qui a pour bords $x_0 x$ est équivalent à un lacet qui aurait pour bords la ligne brisée $x_0 x'_0 x$; en intégrant alors successivement le long de ces deux lacets, on a la même valeur de l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Prise le long du premier lacet, cette intégrale a pour valeur

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f}{dx^n};$$

prise le long du second lacet, elle se décompose en trois parties : 1°

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x_0}^{x'_0}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}};$$

2° une intégrale prise le long du lacet $x'_0 x$, soit

$$\int_{x'_0}^{x}\frac{d^n f}{dx^n};$$

3° une intégrale prise le long de $x'_0 x_0$ qui a pour valeur

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{x'_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}\,e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}};$$

on a donc

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f}{dx^n}=\int_{x'_0}^{x}\frac{d^n f}{dx^n}+\int_{x_0}^{x'_0}\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\left(1-e^{-2(n+1)\pi\sqrt{-1}}\right)\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

et un calcul analogue à celui que nous avons fait tout à l'heure donne enfin

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f}{dx^n}=\int_{x'_0}^{x}\frac{d^n f}{dx^n}+\frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x'_0}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}.$$

Si à l'intérieur du triangle $x_0 x x'_0$ il y avait un point critique de $f(z)$, on voit comment il faudrait modifier le résultat qui précède.

Dérivée de $(x-a)^p$. — En supposant n positif, la dérivée d'ordre $-n$ de $(x-a)^p$, prise à partir de x_0, est

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{x_0}^{x}(z-a)^p(x-z)^{n-1}\,dz;$$

si l'on pose

$$\theta=\frac{z-a}{x-a},$$

cette intégrale devient

$$\frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)}\int_{\frac{x_0-a}{x-a}}^{1}(1-\theta)^{n-1}\theta^p\,d\theta.$$

En prenant alors $x_0 = a$, cette expression se réduit à

$$\frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)} \mathrm{B}(n, p+1) = \frac{(x-a)^{n+p}}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+p+1)}$$

ou à

$$\frac{(x-a)^{n+p}\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+p+1)};$$

si, dans cette formule, on remplace n par $-n$ et si l'on différentie k fois, si enfin on remplace $k-n$ par m, on trouve pour expression de la dérivée $m^{\text{ième}}$ de $x-a$ prise à partir de a, si $p-m$ est positif,

$$\frac{(x-a)^{p-m}\Gamma(p+1)}{\Gamma(-m+p+1)}.$$

Dérivée de e^{ax}. — Faisons a positif : la dérivée d'ordre $-n$ de e^{ax} sera, en supposant n positif,

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}e^{az}\,dz$$

ou, en posant $z = x - t$,

$$-\frac{e^{ax}}{\Gamma(n)}\int_{x-x_0}^{0} t^{n-1}e^{-at}\,dt.$$

On voit que, si $x_0 = -\infty$, la dérivée cherchée sera

$$\frac{e^{ax}}{\Gamma(n)}\int_{0}^{\infty} e^{-at}t^{n-1}\,dt = \frac{e^{ax}}{a^n};$$

la dérivée d'ordre $+m$ sera donc $a^m e^{ax}$. Le résultat est le même quand a est négatif, mais alors il faut prendre $x_0 = +\infty$.

Dérivée d'une dérivée. — On a

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n}{dx^n}\int_{x_0}^{x}\frac{d^m f(x)}{dx^m} = \int_{x_0}^{x}\frac{d^m}{dx^m}\int_{x_0}^{x}\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \int_{x_0}^{x}\frac{d^{m+n} f(x)}{dx^{m+n}}.$$

En effet,

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n}{dx^n}\int_{x_0}^{x}\frac{d^m f(x)}{dx^m} = \int_{x_0}^{x}\frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(m+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{m+1}}$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\int_{x_0}^{x}\frac{d^n}{dx^n}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{m+1}}$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{m+n+1}}\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)}$$

$$= \int_{x_0}^{x}\frac{d^{m+n}f(x)}{dx^{m+n}}.$$

C. Q. F. D.

XXVI. — Dérivée d'un produit.

Supposons la fonction $\varphi(x)$ synectique autour du point x, on aura, par la formule de Taylor,

$$\varphi(z) = \varphi(x) + \frac{z-x}{1}\varphi'(x) + \frac{(z-x)^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots.$$

Multiplions par $\dfrac{\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}\dfrac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}$ et intégrons le long d'un lacet ayant son origine en x_0 et le centre de son cercle en x; nous aurons

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi(z)\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} = \varphi(x)\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$
$$+ \frac{\varphi'(x)}{1}\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\psi(z)\,dz}{(z-x)^{n}} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d^n(\varphi\times\psi)}{dx^n} = \varphi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{d^n\psi}{dx^n} + \frac{n}{1}\varphi'(x)\int_{x_0}^{x}\frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}} + \ldots.$$

C'est la formule de Leibnitz généralisée. On voit que, pour que cette formule soit applicable, il est nécessaire que $\varphi(x)$ soit synectique dans un cercle décrit du point x comme centre et contenant le point x_0. Nous ferons plus loin des applications de cette formule; nous nous en servirons seulement ici

pour démontrer une formule de Vandermonde connue sous le nom de *binôme des factorielles*.

On a identiquement

$$x^{a+b} = x^a x^b.$$

Posons a entier et positif; différentions n fois à partir de la limite o; en supposant $b - n$ positif, nous aurons, en supprimant le facteur commun x^{a+b-n},

$$\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+b-n+1)} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)} + \frac{n}{1}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+2)}b$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n+3)}b(b-1)+\ldots.$$

C'est la formule de Vandermonde.

XXVII. — Différences à indices quelconques.

On a

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 - \ldots;$$

si l'on multiplie les deux membres par x^{a-1} et si l'on intègre de o à 1, on trouve

$$\int_0^1 (1-x)^n x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a} - \frac{n}{1}\frac{1}{a+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{a+2} - \ldots,$$

et ces calculs seront légitimes si a a un module supérieur à zéro, ainsi que n. Cette formule équivaut à

$$B(n+1, a) = \ldots$$

ou à

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(a)}{\Gamma(n+a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{n}{1}\frac{1}{a+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{a+2} - \ldots.$$

Changeons a en $\frac{z-x}{h}$: cette formule deviendra

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{z-x}{h}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{z-x}{h}\right)} = \frac{h}{z-x} - \frac{n}{1}\frac{h}{z-x+h} + \ldots;$$

en multipliant par $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}f(z)\,dz$, on voit que l'on aura, en

intégrant le long d'un contour contenant les points x, $x+h$, $x+2h$, ..., si à l'intérieur de ce contour il n'y a pas de points critiques de $f(z)$,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\Gamma\left(\frac{z-x}{h}\right)dz}{\Gamma\left(n+1+\frac{z-x}{h}\right)}=h\left[f(x)-\frac{n}{1}f(x-h)+\ldots\right].$$

Quand n est entier, le second membre se réduit à $h\,\Delta^n f(x)$ pour $\Delta x=-h$ au signe près. Le premier membre de cette formule pourra donc, dans certains cas, servir à interpoler les différences; mais nous n'insisterons pas sur ces formules, qui n'ont pas d'applications et qui, d'ailleurs, sont soumises à un très grand nombre d'exceptions. Nous devions les signaler dans un Chapitre consacré à l'interpolation.

EXERCICES ET NOTES.

1. Pour $0<r<1$, on a

$$\int_0^\infty\left(e^{-x}-1+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1.2}+\ldots\pm\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right)\frac{dx}{x^{n+r+1}}=\Gamma(-n-r).$$

2. On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\varphi\cos q\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2^{p+1}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

3. On a

$$\begin{aligned}4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)&\\+\frac{n(n-1)}{1.2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)+\ldots&\\+\frac{n}{1}\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).&\end{aligned}$$

(CATALAN, *Journal de Liouville*, 1re série, t. III.)

4. Quand on a

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{1} x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!} x^n + \ldots,$$

on obtient

$$f(x) e^{-x} = a_0 + \frac{x}{1} \Delta a_0 + \frac{x^2}{1.2} \Delta^2 a_0 + \ldots + \frac{x^n}{n!} \Delta^n a_0 + \ldots.$$

5. Quand on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

on a aussi

$$\frac{f(x)}{1-x} = a_0 + (a_0 + a_1) x$$
$$+ (a_0 + a_1 + a_2) x^2 + \ldots + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) x^n + \ldots;$$

en tout cas, on doit avoir $\bmod x < 1$;

$$\frac{f(x)}{1+x} = a_0 - (a_0 - a_1) x + (a_0 - a_1 + a_2) x^2 - \ldots.$$

(Même observation.)

$$f(x)(1-x) = a_0 + x \Delta a_0 + x^2 \Delta a_1 + x^3 \Delta a_2 + \ldots.$$

6. Quand on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

on peut calculer quelquefois

$$(1) \quad a_0 + \frac{m}{1} a_1 x + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a_3 x^3 + \ldots$$

comme il suit : on a

$$\int_0^1 f(ux) u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$$
$$= \sum a_n \mathrm{B}(n+p, q) x^n$$
$$= \sum a_n \frac{\Gamma(n+p)\Gamma(q)}{\Gamma(n+p+q)} x^n$$
$$= \sum a_n \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{(p+q)\ldots(p+q+n-1)} x^n,$$

donc

$$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1 f(ux)\,u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du = \sum a_n x^n \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{(p+q)\ldots(p+q+n-1)};$$

faisant $p+q=1$, $p=-m$, remplaçant x par $-x$, on trouve la somme de la série (1). On peut aussi la trouver au moyen du théorème de Parseval (p. 410).

7. On a $\lim \dfrac{\Gamma(n+z)}{(n-1)!\,n^z} = 1$ pour $n=\infty$.

CHAPITRE XI.

FORMULES DE QUADRATURE.

I. — Formule de Poncelet.

Quand les moyens connus se refusent à l'évaluation d'une intégrale définie, ce qui arrive en particulier quand la fonction à intégrer n'est connue qu'empiriquement, on emploie ce que l'on appelle les *formules de quadrature*. Ces formules font connaître la valeur numérique de l'intégrale cherchée avec

Fig. 27.



une approximation qui dépend en général de la patience du calculateur. Les formules d'Euler et de Boole sont des formules de ce genre.

Une méthode des plus simples et des plus rapides est celle que l'on doit au général Poncelet :

Supposons la fonction à intégrer représentée par une courbe : il s'agit d'évaluer l'aire de cette courbe; la méthode enseignée dans les éléments consiste à décomposer l'aire en trapèzes curvilignes, que l'on remplace par les trapèzes inscrits. Procédons d'abord de cette façon et intercalons entre les ordonnées A_0B_0 et $A_{2n}B_{2n}$, qui limitent l'aire à évaluer, un nombre *impair* d'ordonnées équidistantes A_1B_1,

A_2B_2, ..., soit $y_0 = A_0B_0$, $y_1 = A_1B_1$, ...; on aura évidemment, en appelant S l'aire cherchée et h la distance,

$$A_0A_1 = A_1A_2 \ldots,$$

$$S = \frac{y_0 + y_1}{2} h + (y_1 + y_3) h + (y_3 + y_5) h + \ldots + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2} h$$

avec une erreur par défaut si la courbe est convexe, et par excès dans le cas contraire.

Mais, si par les points B_1, B_3, ... on mène des tangentes à la courbe, on formera de nouveaux trapèzes, dont la somme sera une valeur de l'aire cherchée, avec une erreur de sens contraire à la précédente, si l'on suppose la convexité de la courbe toujours de même sens; on a donc, comme seconde valeur approchée,

$$S = y_1 h + y_3 h + \ldots + y_{2n-1} h;$$

la moyenne des résultats est

$$S = \left[\frac{y_0 + y_1 + y_{2n-1} + y_{2n}}{4} + y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right] h.$$

La demi-différence des résultats donne une limite de l'erreur; cette limite est

$$\frac{y_0 + y_1 + y_{2n-1} + y_{2n}}{4} h.$$

Il est facile d'en donner une représentation géométrique.

II. — Méthode de Th. Simpson.

Dans la méthode de Simpson, une des plus mauvaises que l'on puisse employer, parce que rien n'indique la limite ni même le sens de l'erreur qu'elle comporte, on substitue à l'aire que l'on veut évaluer une série d'aires paraboliques.

A cet effet, on partage l'aire au moyen d'un nombre impair d'ordonnées équidistantes, comme dans la méthode de Poncelet; par les points B_0, B_1, B_2 on fait passer une parabole dont l'axe est vertical; on procède de la même façon à l'égard

de B_2, B_3, B_4, ..., et l'on remplace la courbe par les arcs de parabole ainsi tracés.

L'équation de la parabole passant aux extrémités des ordonnées $B_i B_{i+1} B_{i+2}$ sera

$$y = a + bx + cx^2.$$

Or on peut poser, en prenant pour origine le point A_i, $y_i = a$,

$$y_{i+1} = a + bh + ch^2, \qquad y_{i+2} = a + 2bh + 4ch^2;$$

on en conclut

$$a = y_i, \qquad b = \frac{4y_{i+1} - 3y_i - y_{i+2}}{2h}, \qquad c = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{2h^2};$$

mais l'aire parabolique est

$$\int_0^{2h} (a + bx + cx^2)\,dx = 2ah + 2bh^2 + 8c\frac{h^3}{3},$$

c'est-à-dire, en remplaçant a, b, c par leurs valeurs,

$$\tfrac{1}{3}h(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2});$$

l'aire totale pourra donc être représentée par

$$S = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \ldots + y_{2n})$$

ou bien

$$S = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 2y_2 + 2y_4 \ldots + y_{2n}) + \tfrac{4}{3}h(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}),$$

ce que l'on peut encore écrire

$$S = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 2\sigma_2 + 4\sigma_1],$$

σ_2 désignant la somme des ordonnées d'indices pairs non compris y_0 et y_{2n}, et σ_1 la somme des ordonnées d'indices impairs.

III. — Formule de quadrature de Côtes.

La méthode de Côtes consiste à substituer à la courbe que l'on veut carrer une parabole passant par un certain nombre de points de cette courbe.

Soient $y = \psi(x)$ l'équation de la courbe donnée, a_1, a_2, a_3, ..., a_n des abscisses quelconques,

$$y = \sum \frac{\psi(a)}{F'(a)} \frac{F(x)}{x - a}$$

sera, d'après la formule d'interpolation de Lagrange, l'équation d'une parabole de degré $n - 1$ passant par les n points de la courbe $y = \psi(x)$ correspondant aux abscisses $a_1, \ldots, a_n$. Rappelons d'ailleurs que $F(x)$ est égal, à un facteur près, au produit $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$: l'aire de la courbe donnée prend alors la forme

$$\sum \int_{a_1}^{a_n} \frac{\psi(a)}{F'(a)} \frac{F(x)}{x - a} dx$$

ou

$$A_1\psi(a_1) + A_2\psi(a_2) + \ldots + A_n\psi(a_n),$$

formule où l'on a posé

$$A_i = \int_{a_1}^{a_n} \frac{F(x)}{F'(a_i)(x - a_i)} dx.$$

Si $F(x)$ est un polynôme donné à l'avance, par exemple $(x - 1)(x - 2)\ldots(x - n)$, A_i pourra être calculé une fois pour toutes et la même formule pourra servir pour trouver l'aire d'une infinité de trapèzes curvilignes ayant une base n.

Nous donnerons plus loin une formule due à Gauss et plus exacte.

FIN DU TOME TROISIÈME.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Introduction.

CHAPITRE II.

Calcul des intégrales.

CHAPITRE III.

Théorie des intégrales définies.

CHAPITRE IV.

Sur les intégrales multiples.

CHAPITRE V.

Intégrales des différentielles totales.

CHAPITRE VI.

Intégrales définies prises entre des limites imaginaires et résidus de Cauchy.

CHAPITRE VII.

Intégration par les séries.

CHAPITRE VIII.

*Propriétés des fonctions monogènes et monodromes.

CHAPITRE IX.

*Des fonctions périodiques.

CHAPITRE X.

Sur l'interpolation des fonctions numériques.

CHAPITRE XI.

Formules de quadrature.

FIN DE LA TABLE DU TOME TROISIÈME.

ERRATA.

Tome II (suite).

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
414	15	$-\frac{d^2 s}{R} a$	$-\frac{ds^2}{R^2} a$
414	16	$-ds\, d\frac{1}{R} a''$	$ds\, d\frac{1}{T} a''$
414	17	$-\frac{ds^2}{R^2} a''$	$-\frac{ds^2}{T^2} a''$
145	4	développée	polaire réciproque par rapport à un cercle

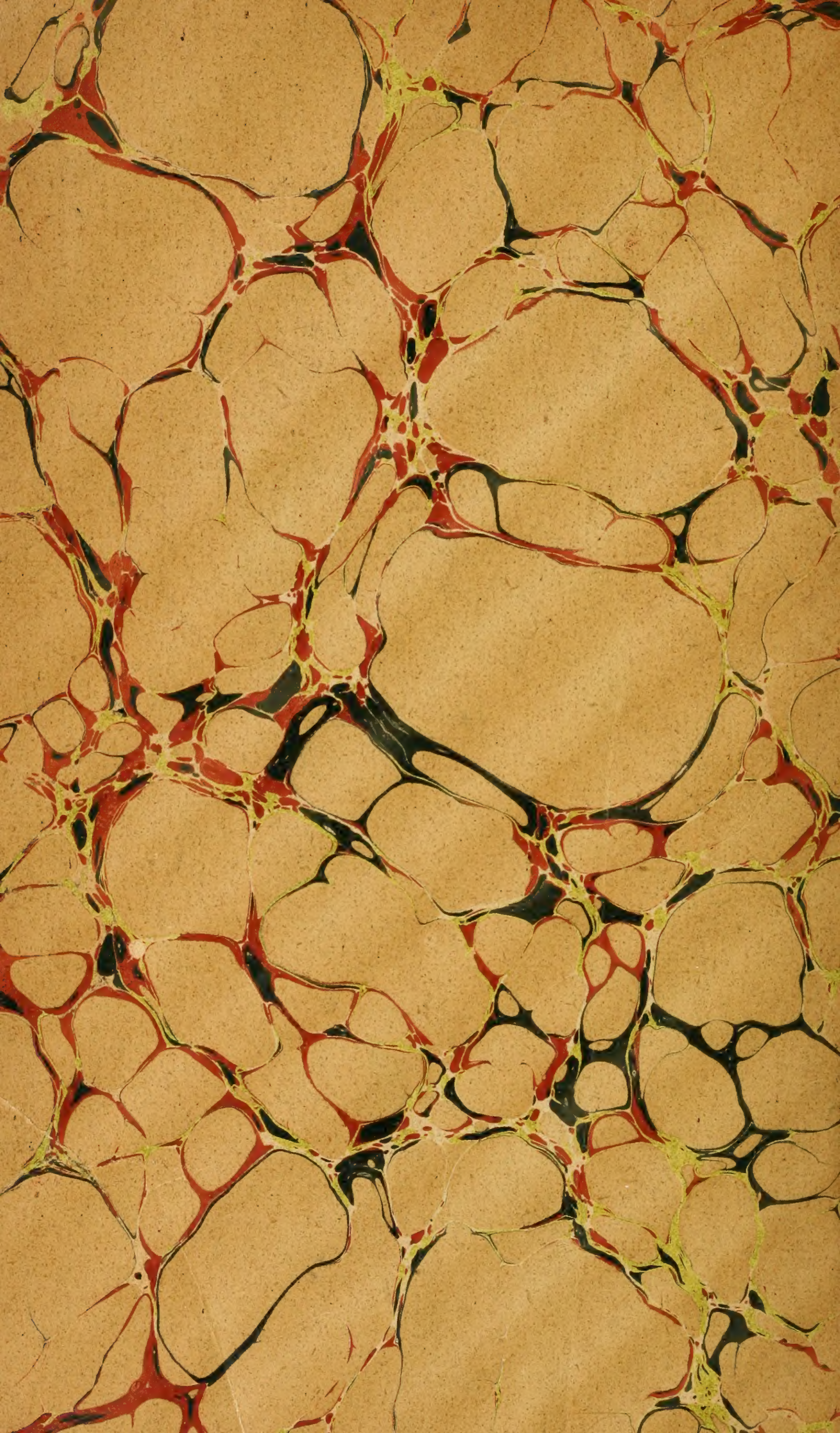
Tome III.

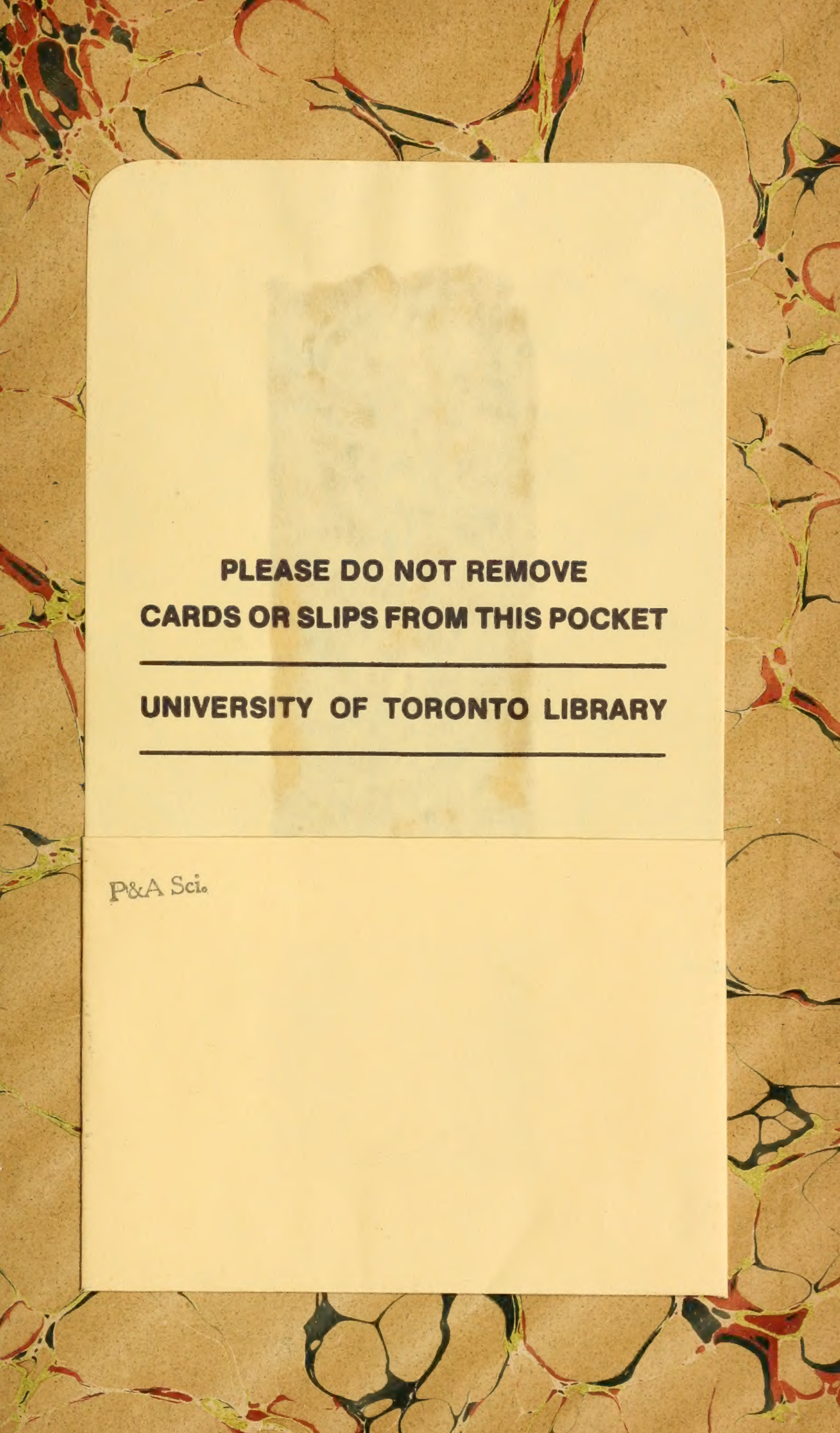
13	30	au moins égal à C_p	au plus égal à C_p
21	16	$\sum_{x_0}^{X} X(x)\Delta x$	$\sum_{x_0}^{X} \chi(x)\Delta x$
[illegible]4	12	$Mx + nN$	$(Mx + N)\,dx$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
39	18	$\lim \sum_{x^0}^{x} Y\Delta x$	$\lim \sum_{x_0}^{x} Y\Delta x$
42	2	$\frac{u\sqrt{c}-b}{a-u^2}$	$\frac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2}$
63	17	$m-1,\quad m-2$	$m-2,\quad m-4$
68	5	$\frac{dw}{dx}$	$\frac{du}{dx}$
103	3	$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,du$	$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx$
111	9	[arc tang x]	[arc tang $f(x)$]
114	22	$Sf(x)$	$Sf(X)$
129	5	dt	dx
153	1	$\frac{d\psi}{dz}\,d\zeta$	$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\,d\zeta$
171	21	$(1-r^2)^{\frac{2}{3}}$	$(1-r^2)^{\frac{3}{2}}$
175	13	$dx\,dy$	$dz\,dy$
175	14	$\int\int \pm\, dx\,dy$	$\int\int \pm\, dy\,dz$
191	6	$dz_{i-}dz_{1,+1}$	$dz_{i-1}dz_{i+1}$
206	15	$\frac{\partial x_n}{dt}$	$\frac{\partial x_n}{\partial t}$
227	32	ce contour	cette aire
242	12	$\int^{z} \frac{\partial f}{\partial x}\,dz$	$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial f}{\partial x}\,dz$
244	6	multiplié	multipliée
246	6 en rem.	$\oint \frac{f(x)}{z-c}$	$\oint \frac{f(z)}{z-c}$
259	21	$\int^{\alpha\sqrt{2n-1}}$	$\int_0^{\alpha\sqrt{2n-1}}$
269	9 en remon.	$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2n\theta\,d\theta}{\sqrt{1-2k\cos^2\theta+k^2}}$	$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2n\theta\,d\theta}{\sqrt{1-2k\cos 2\theta+k^2}}$
303	6	$a_1+2a_1x+3a_2x^2+\ldots$	$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$
352	4	$a(a-3b)$	$a(a-3b)^2$
360	12	ou infinie	supprimez ces mots
363	11 en remon.	$n=\infty$	$x=\infty$
364	2 en remon.	$\sum\int_{a_i}\frac{f(x)}{z-x}\,dz$	$\sum\int_{a_i}\frac{f(z)}{z-x}\,dz$
374	16	$\alpha\delta-\beta\delta$	$\alpha\delta-\beta\gamma$
387	2	A^2e^{2x}	A_2e^{2x}
403	9	$e^{-(\xi-x)}$	$e^{-(\xi-x)\sqrt{-1}}$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
412	3	$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}$	$\int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}$
430	3 en remon.	$\frac{(m-3)a^2}{1.2}$	$\frac{(m-3)a}{1.2}$
431	10	$\varphi_3(1)$	$\varphi_3(-1)$
440	5 en remon.	$\frac{1}{3(m-2)^2}$	$\frac{1}{3(m-2)^3}$

12251 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.




PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
P&A Sci.

